<u>Posible solución del examen de Investigación Operativa de Sistemas de septiembre de 2011</u>

<u>Problema 1</u>: (*3 puntos)*

Dos bolas blancas están colocadas en una mesa al lado de una bolsa que contiene una bola blanca y dos negras. Reiteradamente se extrae una bola de la bolsa que se coloca a derecha de las dos anteriores y después se devuelve a la bolsa la bola de la izquierda. Determinar:

a) El diagrama de transición de estados y la matriz de transición de una cadena de Markov que modele esta situación.

b) El número medio de bolas blancas que hay a la larga fuera de la bolsa.

Solución:

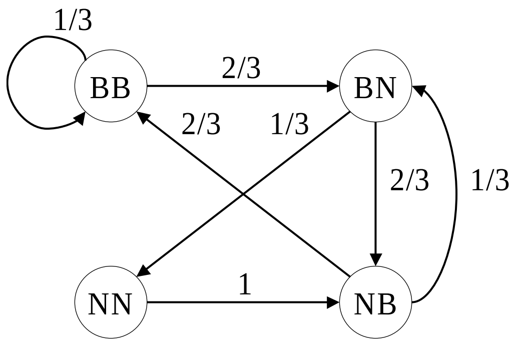
Apartado a):

Sabiendo de qué color son las bolas que están fuera de la bolsa, podemos deducir las que hay dentro. Por lo tanto, los estados serán de la forma ID, donde I es el color de la bola que está fuera y a la izquierda, y D es el color de la bola que está fuera y a la derecha.

El conjunto de estados será: S={BB, BN, NB, NN}. La matriz de transición correspondiente es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El diagrama de transición de estados (DTE) correspondiente es el que sigue:



Apartado b):

Como esta cadena de Markov es finita y ergódica, podemos afirmar que existe la distribución estacionaria. Debemos hallar dicha distribución estacionaria, ya que nos dirá qué probabilidad hay de encontrarse en cada estado (a la larga), y estas probabilidades serán necesarias para hallar el número medio de bolas blancas fuera de la bolsa. Para calcular la distribución estacionaria, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} p_{BB} \\ p_{BN} \\ p_{NB} \\ p_{NN} \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} p_{BB} \\ p_{BN} \\ p_{NB} \\ p_{NN} \end{pmatrix}$$

$$p_{BB} + p_{BN} + p_{NB} + p_{NN} = 1$$

El sistema puede resolverse, por ejemplo, fijando p_{BB}=1 y normalizando luego. La solución final del sistema es:

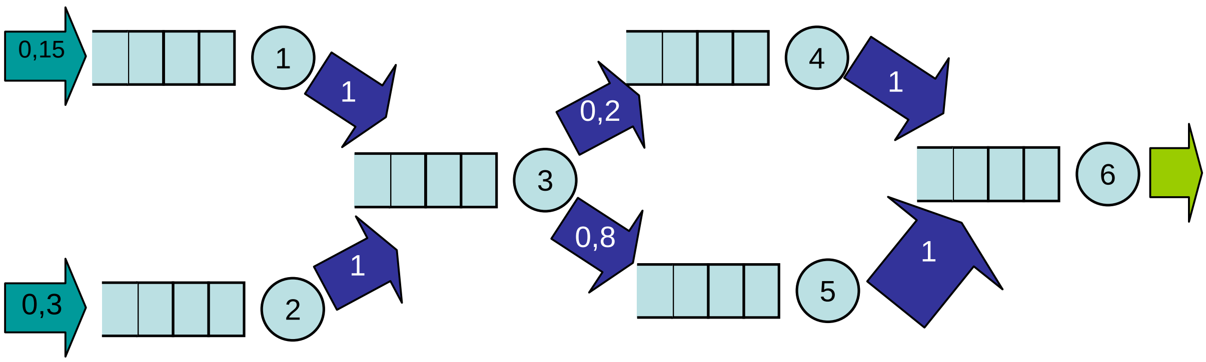
$$p_{BB} = \frac{3}{10}; p_{BN} = \frac{3}{10}; p_{NB} = \frac{3}{10}; p_{NN} = \frac{1}{10}$$

Lo que nos piden es la esperanza de la variable aleatoria cuyo valor es el número de bolas blancas fuera de la bolsa. Dicha esperanza será:

$$E[\text{Número de bolas blancas}] = 2p_{BB} + p_{BN} + p_{NB} + 0 \cdot p_{NN} =$$
$$2\frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \text{ bolas}$$

<u>Problema 2</u>: (*3 puntos*)

Una empresa automovilística debe establecer una cadena de montaje. La disposición de las máquinas es como muestra la siguiente figura:



El fabricante nos proporciona el tiempo de espera (en minutos) de cada sistema que forma la red:

W_1	0,540541
W_2	1
W_3	2,857143
W_4	0,255754
W_5	0,378788
W_6	1,818182

a) Si cada minuto que se espera en la red (W_{red}) le cuesta a la empresa 1000 euros, ¿Cuál es la pérdida total por cada vehículo que se monta en la red expuesta?

b) Si compramos una máquina que sustituye la máquina 3 que nos cuesta 2500 euros con $\mu = 2$.¿Obtendremos un mayor beneficio en la empresa?

Solución:

Apartado a):

Según el diagrama tendremos las siguientes entradas a la red:

γ_1 = 0,15 clientes/min, γ_2 = 0,3 clientes/min, $\forall i \in \{3, 4, 5, 6\}$, $\gamma_i = 0$

Para hallar W_{red} necesitamos conocer L_{red}, y a su vez para ello necesitamos calcular los números medios de trabajos L_i para cada nodo *i*. En primer lugar hallaremos las tasas de llegadas a cada nodo mediante las ecuaciones de equilibrio:

$\lambda_1 = \gamma_1 = 0{,}15$ clientes/min
$\lambda_2 = \gamma_2 = 0{,}3$ clientes/min
$\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}45$ clientes/min
$\lambda_4 = 0{,}2\lambda_3 = 0{,}09$ clientes/min
$\lambda_5 = 0{,}8\lambda_3 = 0{,}36$ clientes/min
$\lambda_6 = \lambda_4 + \lambda_5 = 0{,}45$ clientes/min

Aplicamos el teorema de Little a cada nodo, $L_i = \lambda_i W_i$:

$L_1=\lambda_1 W_1 \approx 0{,}081081$ clientes
$L_2=\lambda_2 W_2 \approx 0{,}3$ clientes
$L_3=\lambda_3 W_3 \approx 1{,}285714$ clientes
$L_4=\lambda_4 W_4 \approx 0{,}023018$ clientes
$L_5=\lambda_5 W_5 \approx 0{,}136364$ clientes
$L_6=\lambda_6 W_6 \approx 0{,}818182$ clientes

Aplicamos la ecuación para L_{red} y posteriormente la de W_{red}, en este último caso sabiendo que $\lambda_{red} = \gamma_1 + \gamma_2 = 0{,}45$ clientes/min:

$$L_{red} = \sum_{i=1}^{6} L_i \approx 2{,}644359 \text{ clientes}; \qquad W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}} \approx 5{,}876353 \text{ min} .$$

La pérdida por cada vehículo será de (1000 €)· $W_{red} \approx 5876{,}353$ €

Apartado b):

Debemos recalcular W_{red}, teniendo en cuenta que el nodo 3 ha cambiado su servidor. Utilizando las ecuaciones que aparecen al final del enunciado obtenemos el nuevo valor del número medio de trabajos en el nodo 3:

$$\rho_3' = \frac{\lambda_3}{\mu_3'} = 0{,}225$$

$$L_3' = \lambda_3 W_3' = \lambda_3\left(W_{q3}' + \frac{1}{\mu_3'}\right) = L_{q3}' + \rho_3' = \frac{(\rho_3')^2}{1-\rho_3'} + \rho_3' = \frac{\rho_3'}{1-\rho_3'} \approx 0{,}290323 \text{ trabajos}$$

Como hicimos en el apartado a), aplicamos la ecuación para L_{red} y posteriormente la de W_{red}:

$$L_{red}' = \sum_{i=1}^{6} L_i' \approx 1{,}648967 \text{ clientes}; \qquad W_{red}' = \frac{L_{red}'}{\lambda_{red}} \approx 3{,}664371 \min .$$

Nótese que los flujos entre nodos no varían (las ecuaciones de equilibrio no han cambiado). El coste total ahora será 2500€ + (1000 €)· W_{red}' ≈ 6164,371 €. Así pues, la alternativa original (la del apartado a) es la más beneficiosa.

<u>Problema 3</u>: (*4 puntos)*

En un almacén de frutas hay 800 kilogramos de naranjas, 800 kilogramos de manzanas y 500 kilogramos de uvas. Estas frutas se convierten en zumo de dos tipos (A y B). Cada litro de zumo tipo A se fabrica a partir de 1 kilogramo de naranjas, 2 kilogramos de manzanas y 1 kilogramo de uvas y cada litro de zumo tipo B se fabrica a partir de 2 kilogramos de naranjas, 1 kilogramo de manzanas y 1 kilogramo de uvas. El beneficio que se obtiene con cada litro de zumo tipo A es de 1,20 € y con cada litro de zumo tipo B de 1,40 €. Determinar mediante el método gráfico :

a) La cantidad (en litros) de cada tipo de zumo que se debe fabricar para conseguir unos beneficios máximos.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

<u>Solución:</u>

Variables de decisión:

x_1 = litros de zumo tipo A que se fabricarán

x_2 = litros de zumo tipo B que se fabricarán

Restricciones:

$x_1 + 2x_2 \le 800$

$2x_1 + x_2 \le 800$

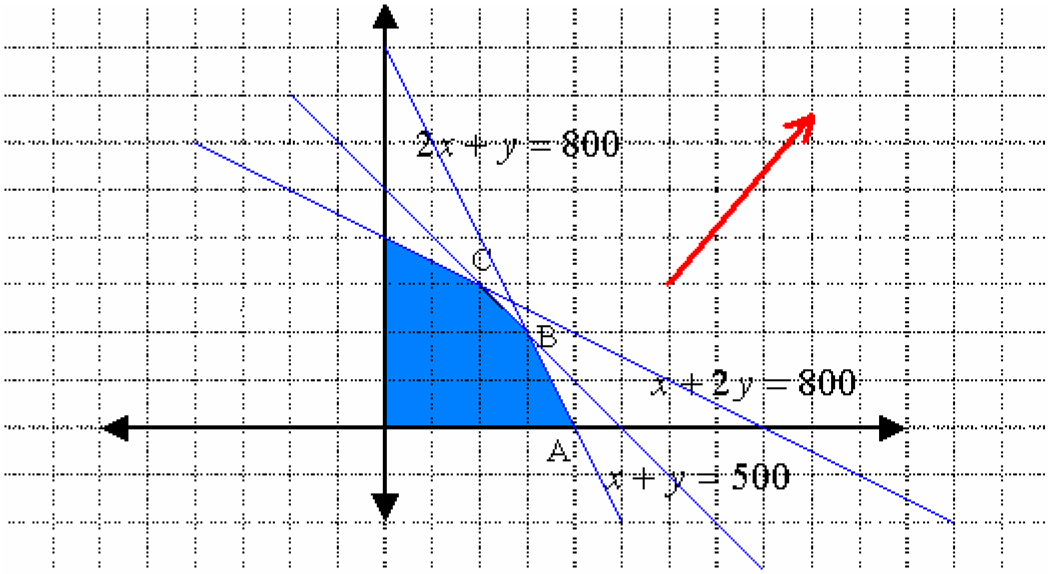
$x_1 + x_2 \le 500$

$x_1, x_2 \ge 0$

Función objetivo que maximizar:

$f(x_1, x_2) = 1{,}20\, x_1 + 1{,}40\, x_2$

El gráfico correspondiente será:



Apartado a):

Los puntos extremos más interesantes son A(400,0), B(300,200) y C(200,300). Se plantea la duda de si será B la solución óptima o bien lo será C. Para saberlo hallamos los valores de la función objetivo en ambos puntos:

$f(B) = 1{,}20 \cdot 300 + 1{,}40 \cdot 200 = 640$ euros

$f(C) = 1{,}20 \cdot 200 + 1{,}40 \cdot 300 = 660$ euros

Se observa que el punto C es la solución óptima única de este problema ($x_1 = 200$, $x_2 = 300$).

Apartado b):

El valor óptimo ya se calculó en el apartado anterior y es de 660 euros.

FÓRMULAS DE TEORÍA DE COLAS

M/M/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; \quad p_n = \rho^n(1-\rho); \quad L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}; \quad W(t) = e^{-t/W} \quad W_q(t) = \rho e^{-t/W}$$

M/M/c

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}; \quad p_0 = \left(\frac{c^c \rho^c}{c!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} \right)^{-1}; \quad L_q = \frac{c^c \rho^{c+1} p_0}{c!(1-\rho)^2}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(c\rho)^n}{n!} p_0, \text{ si } n = 0,1,\ldots,c \\ \dfrac{c^c \rho^n}{c!} p_0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

M/M/1 y M/M/c

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}; \qquad L_q = \lambda W_q; \qquad L = \lambda W$$

M/M/1/k

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}; \qquad p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}}, \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{\mathrm{k}+1}, \text{si } \rho = 1 \end{cases} \qquad L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{k}{2}, \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}; \qquad L_q = \lambda_{ef} W_q; \qquad L = \lambda_{ef} W; \qquad \lambda_{ef} = \lambda(1 - p_k)$$

Redes de Jackson abiertas

$$\lambda_{red} = \sum_{i=1}^{K} \gamma_i; \quad L_{red} = \sum_{i=1}^{K} L_i; \quad W_{red} = \frac{L_{red}}{\lambda_{red}}; \quad V_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{red}}$$

Redes de Jackson cerradas

$$W_j(m) = \frac{1 + L_j(m-1)}{c_j \mu_j}; \qquad L_j(m) = m \frac{\lambda_j^* W_j(m)}{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i^* W_i(m)}; \qquad \lambda_j(m) = \frac{L_j(m)}{W_j(m)}; \qquad L_j(0) = 0$$