Soluciones de los ejercicios de Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales (primer cuatrimestre). Tema 1.

1. Sea el monoide ($\mathbf{N}$,+). Dado un conjunto unitario A={n}, $n \in \mathbf{N}$, hallar el cierre estricto de A según los valores de n (demostrar la respuesta).

Solución: Si operamos el elemento de A consigo mismo obtenemos $n+n=2n$. Si operamos lo que hemos obtenido con n de nuevo obtenemos $n+2n=3n$. Parece que el cierre estricto de A es el conjunto de los múltiplos de n, M={ kn | $k \in \mathbf{N}-\{0\}$ }. Demostremos que M=A^+ por la técnica de doble inclusión.

1º Demostremos que $M \subseteq A^+$. Demostraremos por inducción sobre k que para todo $k \geq 1$ se tiene $kn \in A^+$.

- C. B. (k=1). Entonces $kn=n$. Pero como $n \in$ A, entonces $n \in A^+$.
- H. I. Para un cierto $k \in \mathbf{N}-\{0\}$, supongamos que $hn \in A^+$, $\forall h \in \{1, ..., k\}$.
- P. I. Se tendrá $(k+1)n=kn+n$. Pero kn, $n \in A^+$ por la H. I. Luego $(k+1)n \in A^+$.

2º Demostremos que $A^+ \subseteq M$. Sea $a \in A^+$. Si $a \in$ A, entonces $a=n$, con lo cual por definición de M tenemos que $a \in$ M. En otro caso, para obtener a hemos debido operar entre sí diversos elementos de A y luego (posiblemente) operar los resultados. Pero como A sólo tiene el elemento n, y la operación es asociativa, forzosamente $a=n+...+n$. Llamando k al número de veces que aparezca n se tendrá $a=kn$, con lo que $a \in$ M.

2. Ídem para ($\mathbf{N}$,·)

Solución: Si operamos el elemento de A consigo mismo obtenemos $n \cdot n=n^2$. Si operamos lo que hemos obtenido con n de nuevo obtenemos $n \cdot n^2=n^3$. Parece que el cierre estricto de A es el conjunto de las potencias de n, M={ n^k | $k \in \mathbf{N}-\{0\}$ }. Demostremos que M=$A^\bullet$ por la técnica de doble inclusión.

1º Demostremos que $M \subseteq A^\bullet$. Demostraremos por inducción sobre k que para todo $k \geq 1$ se tiene $n^k \in A^\bullet$.

- C. B. (k=1). Entonces $n^k=n$. Pero como $n \in$ A, entonces $n \in A^\bullet$.
- H. I. Para un cierto $k \in \mathbf{N}-\{0\}$, supongamos que $n^h \in A^\bullet$, $\forall h \in \{1, ..., k\}$.
- P. I. Se tendrá $n^{k+1}=n^k \cdot n$. Pero n^k, $n \in A^\bullet$ por la H. I. Luego $n^{k+1} \in A^\bullet$.

2º Demostremos que $A^\bullet \subseteq M$. Sea $a \in A^\bullet$. Si $a \in$ A, es trivial. En otro caso, para obtener a hemos debido operar entre sí diversos elementos de A y luego (posiblemente) operar los resultados. Pero como A sólo tiene el elemento n, y la operación es asociativa, forzosamente $a=n \cdot ... \cdot n$. Llamando k al número de veces que aparezca n se tendrá $a=n^k$, con lo que $a \in$ M.

3. Sea el conjunto

$$A = \mathbf{Q} \cup \left\{ \sqrt[n]{\frac{p}{q}} \;\middle|\; \left(\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}^+\right) \wedge \left(n \in \mathbf{N} - \{0,1\}\right) \right\}$$

Hallar ||A||.

Solución: Se tendrá ||A||=||**N**||. Para demostrar esto, sea la función

$$f : A \to B$$
$$f\left(\frac{p}{q}\right) = (0, p, q)$$
$$f\left(\sqrt[n]{\frac{p}{q}}\right) = (n-1, p, q)$$

donde *p/q* es una fracción irreducible, esto es, *mcd(p,q)=1*. Si tomamos

$$B = \{(n, p, q) \mid q \neq 0 \wedge \mathrm{mcd}(p, q) = 1\}$$

no es difícil ver que *f* es biyectiva. Luego ||A||=||B||.

Por otro lado, B⊂$\mathbf{N}^3$. Como $\mathbf{N}^3$ es numerable (ver proposición de la teoría), B también lo será (ver otra proposición de la teoría). Pero como B es infinito, entonces será infinito numerable. Por tanto, ||B||=$\aleph_0$. Teniendo en cuenta que ||A||=||B||, se obtiene ||A||=$\aleph_0$.

4. Hallar ||**Q**–**N**||, ||$\mathbf{Q}^{526}$||, ||**Q**×**N**||.

Solución:

||**Q**–**N**||: Sabemos por la teoría que **Q** es numerable. La diferencia **Q**–**N** es un conjunto infinito (el conjunto de los racionales no naturales), y también será numerable, ya que es un subconjunto de **Q**, que es un conjunto numerable (ver proposición de la teoría). Por tanto, ||**Q**–**N**||=$\aleph_0$.

||$\mathbf{Q}^{526}$||: Sabemos por la teoría que **Q** es numerable. Por tanto, $\mathbf{Q}^{526}$ es una potencia finita de un conjunto numerable, con lo cual será numerable (ver proposición de la teoría). Como además es infinito, tendremos ||$\mathbf{Q}^{526}$||=$\aleph_0$.

||**Q**×**N**||: Sabemos por la teoría que **Q** y **N** son numerables. Por tanto, **Q**×**N** es el producto cartesiano de dos conjuntos numerables, con lo cual será numerable (ver corolario de la teoría). Como además es infinito, tendremos ||**Q**×**N**||=$\aleph_0$.

5. Demostrar que ||$\mathbf{R}^2$||=$\aleph_1$.

Solución: Es preciso encontrar una biyección entre $\mathbf{R}^2$ y **R**. De forma parecida a como hicimos en el teorema de Cantor, en lugar de trabajar con $\mathbf{R}^2$ y **R** lo haremos con (0,1)×(0,1) y (0,1). En la demostración de dicho teorema se probó que **R** es equipotencial con (0,1), así que no lo repetiremos. Para demostrar que $\mathbf{R}^2$ es equipotencial con (0,1)×(0,1), usamos la función:

$$g_2 : (0,1) \times (0,1) \to \mathbf{R}^2$$
$$g_2(x, y) = \left(tg\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right], tg\left[\left(y - \frac{1}{2}\right)\pi\right]\right)$$

que puede probarse fácilmente que es biyectiva.

Para probar que (0,1)×(0,1) y (0,1) son equipotenciales, definimos una función *f* que acepta dos argumentos reales y utiliza la expresión decimal completa de ambos para devolver otro número real. En caso de haber reales con dos expresiones decimales, escogemos la de infinitos nueves hacia la derecha.

$$f:(0,1)\times(0,1)\rightarrow(0,1)$$
$$f(0'd_0d_1d_2...,0'e_0e_1e_2...)=0'd_0e_0d_1e_1d_2e_2...$$

Se deja como ejercicio demostrar que *f* es biyectiva, lo cual completa la demostración.

6. Sea C un conjunto de 7 números enteros positivos cuyo máximo es, a lo sumo, 14. Demostrar que en tal caso se cumple que:

$$\exists S_1,S_2\subseteq C\mid(S_1\neq S_2)\wedge\left(\sum_{n\in S_1}n=\sum_{m\in S_2}m\right)$$

   Es decir, se pide demostrar que existen dos subconjuntos distintos $S_1,S_2\subseteq C$ tales que sus sumas coinciden.

Solución: Por el principio de los casilleros. Usaremos $A=2^C$, que es el conjunto de los subconjuntos de C, y B={0,1,...,14+13+12+11+10+9+8}, que es el conjunto de los posibles resultados (posibles sumas), donde ||A||=128>||B||=78. La función a la que se le aplica el principio de los casilleros es:

$$f:A\rightarrow B$$
$$f(Z)=\sum_{i\in Z}i$$

7. ¿Cuántas veces se debe lanzar un solo dado para estar seguro de obtener la misma puntuación por lo menos dos veces?

Solución: 7 veces (por el principio de los casilleros).
A={Tiradas}, B={Resultados}={1,...,6}

Ejercicios de Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales (primer cuatrimestre). Tema 1.

1. Sea el monoide $(\mathbf{N},+)$. Dado un conjunto unitario $A=\{n\}$, $n\in\mathbf{N}$, hallar el cierre estricto de A según los valores de n (demostrar la respuesta).

2. Ídem para $(\mathbf{N},\cdot)$

3. Sea el conjunto

$$A = \mathbf{Q} \cup \left\{ \sqrt[n]{\frac{p}{q}} \;\middle|\; \left(\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}^{+}\right) \wedge \left(n \in \mathbf{N} - \{0,1\}\right) \right\}$$

Hallar $\|A\|$.

4. Hallar $\|\mathbf{Q}-\mathbf{N}\|$, $\|\mathbf{Q}^{526}\|$, $\|\mathbf{Q}\times\mathbf{N}\|$.

5. Demostrar que $\|\mathbf{R}^2\|=\aleph_1$.

6. Sea C un conjunto de 7 números enteros positivos cuyo máximo es, a lo sumo, 14. Demostrar que en tal caso se cumple que:

$$\exists S_1, S_2 \subseteq C \mid (S_1 \neq S_2) \wedge \left(\sum_{n\in S_1} n = \sum_{m\in S_2} m \right)$$

Es decir, se pide demostrar que existen dos subconjuntos distintos $S_1,S_2\subseteq C$ tales que sus sumas coinciden.

7. ¿Cuántas veces se debe lanzar un solo dado para estar seguro de obtener la misma puntuación por lo menos dos veces?