Soluciones de los ejercicios de Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales (primer cuatrimestre). Tema 2.

1. Demostrar que la aplicación de Parikh satisface

$$\Psi_\Sigma(xy) = \Psi_\Sigma(x) + \Psi_\Sigma(y)$$

donde + es la suma de tuplas (o vectores) de números naturales.

Solución: Sea $\Sigma=\{a_1, a_2,..., a_k\}$. Por definición de la aplicación de Parikh,

$$\Psi_\Sigma(xy) = \left(|xy|_{a_1}, |xy|_{a_2}, ..., |xy|_{a_k}\right) = ...$$

Por definición de número de ocurrencias de un símbolo en una cadena,

$$... = \left(|x|_{a_1} + |y|_{a_1}, |x|_{a_2} + |y|_{a_2}, ..., |x|_{a_k} + |y|_{a_k}\right) = ...$$

Por definición de suma de vectores,

$$... = \left(|x|_{a_1}, |x|_{a_2}, ..., |x|_{a_k}\right) + \left(|y|_{a_1}, |y|_{a_2}, ..., |y|_{a_k}\right) = ...$$

Por definición de la aplicación de Parikh,

$$... = \Psi_\Sigma(x) + \Psi_\Sigma(y)$$

2. Sea L un lenguaje finito con ||L||=2781 y cuya cadena más larga tiene 342 símbolos. Demostrar que existen dos cadenas w_1, $w_2 \in$L tales que $|w_1|=|w_2|$.

Solución: Por el principio de los casilleros, utilizando A=L, B={0,1,...,342}. Nótese que B es el conjunto de las posibles longitudes que puede tener una cadena de L. Se tendrá ||A||=2781>||B||=343.

3. Sea G=(N,T,P,S) una gramática sensible al contexto, y sea la derivación de G

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n$$

Demostrar que $|w_0| \leq |w_n|$.

Solución: Por inducción sobre la longitud de la derivación n.

-Caso base, n=0. En tal caso $w_0= w_n$, con lo que $|w_0| = |w_n|$, de donde deducimos que $|w_0| \leq |w_n|$.

-Hipótesis de inducción. Para un cierto $n \in \mathbf{N}$, supongamos que toda derivación de G con longitud k, donde $k \leq n$, satisface que $|w_0| \leq |w_k|$.

-Paso inductivo. Sea la derivación de G

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n+1}$$

cuya longitud es $n+1$. Entonces lo siguiente también es una derivación de G:

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow ... \Rightarrow w_n$$

Aplicando la H.I. a esta última derivación, obtenemos que $|w_0| \leq |w_n|$. Por otra parte, por definición de derivación, debe verificarse que $w_n \Rightarrow w_{n+1}$, con lo cual w_{n+1} se obtiene a partir de w_n por aplicación de una regla $\alpha \rightarrow \beta \in$P. Al ser G sensible al contexto, la regla

$\alpha \to \beta$ es tal que $|\alpha| \leq |\beta|$, lo cual implica que $|w_n| \leq |w_{n+1}|$. Resumiendo, tenemos que debe verificarse $|w_0| \leq |w_n| \wedge |w_n| \leq |w_{n+1}|$, lo cual implica que $|w_0| \leq |w_{n+1}|$.

4. Sea G=(N,T,P,S) una gramática lineal, y sea la derivación de G

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$$

Demostrar que $suma(\Psi_N(w_0)) \geq suma(\Psi_N(w_n))$, donde Ψ_N es la aplicación de Parikh sobre el alfabeto no terminal N, y *suma* es una función que nos da la suma de todas las componentes del vector de números naturales que toma como argumento.

Solución: Por inducción sobre la longitud de la derivación n.

-Caso base, n=0. En tal caso $w_0 = w_n$, con lo que $suma(\Psi_N(w_0)) = suma(\Psi_N(w_n))$, de donde deducimos que $suma(\Psi_N(w_0)) \geq suma(\Psi_N(w_n))$.

-Hipótesis de inducción. Para un cierto $n \in \mathbf{N}$, supongamos que toda derivación de G con longitud k, donde $k \leq n$, satisface que $suma(\Psi_N(w_0)) \geq suma(\Psi_N(w_k))$.

-Paso inductivo. Sea la derivación de G

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n \Rightarrow w_{n+1}$$

cuya longitud es $n+1$. Entonces lo siguiente también es una derivación de G:

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$$

Aplicando la H.I. a esta última derivación, obtenemos que $suma(\Psi_N(w_0)) \geq suma(\Psi_N(w_n))$. Por otra parte, por definición de derivación, debe verificarse que $w_n \Rightarrow w_{n+1}$, con lo cual w_{n+1} se obtiene a partir de w_n por aplicación de una regla $\alpha \to \beta \in P$. Al ser G lineal, la regla $\alpha \to \beta$ es tal que $suma(\Psi_N(\alpha)) \geq suma(\Psi_N(\beta))$, lo cual implica que $suma(\Psi_N(w_n)) \geq suma(\Psi_N(w_{n+1}))$. Resumiendo, tenemos que debe verificarse $suma(\Psi_N(w_0)) \geq suma(\Psi_N(w_n)) \wedge suma(\Psi_N(w_n)) \geq suma(\Psi_N(w_{n+1}))$, de donde podemos deducir que $suma(\Psi_N(w_0)) \geq suma(\Psi_N(w_{n+1}))$.

5. Demostrar que cualquier lenguaje regular que no contenga la cadena vacía puede ser generado por alguna gramática de contexto libre que no sea regular ni lineal.

Solución: Sea L un lenguaje regular. Entonces existe una gramática regular G=(N,T,P,S) tal que: L(G)=L–{ε}=L. Sea $A \notin N \cup T$. Construimos entonces la gramática de contexto libre no regular ni lineal G'=(N',T,P',S), donde $N'=N \cup \{A\}$, $P'=P \cup \{A \to AA\}$. Se tendrá que G y G' son gramáticas equivalentes, puesto que la regla añadida nunca puede aplicarse. Por consiguiente, L(G')=L.

Ejercicios de Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales (primer cuatrimestre). Tema 2.

1. Demostrar que la aplicación de Parikh satisface

$$\Psi_\Sigma(xy) = \Psi_\Sigma(x) + \Psi_\Sigma(y)$$

donde + es la suma de tuplas (o vectores) de números naturales.

2. Sea L un lenguaje finito con $||L||=2781$ y cuya cadena más larga tiene 342 símbolos. Demostrar que existen dos cadenas $w_1, w_2 \in L$ tales que $|w_1|=|w_2|$.

3. Sea G=(N,T,P,S) una gramática sensible al contexto, y sea la derivación de G

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$$

Demostrar que $|w_0| \leq |w_n|$.

4. Sea G=(N,T,P,S) una gramática lineal, y sea la derivación de G

$$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$$

Demostrar que *suma*($\Psi_N(w_0)$) $\geq$ *suma*($\Psi_N(w_n)$), donde Ψ_N es la aplicación de Parikh sobre el alfabeto no terminal N, y *suma* es una función que nos da la suma de todas las componentes del vector de números naturales que toma como argumento.

5. Demostrar que cualquier lenguaje regular que no contenga la cadena vacía puede ser generado por alguna gramática de contexto libre que no sea regular ni lineal.