Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales. Soluciones a ejercicios propuestos de los temas 1 y 2

Ejercicio: Sea el conjunto A infinito numerable por medio de la biyección g: $\mathbf{N} \to$ A, y sea un conjunto infinito B⊆A. Pruébese que B también es numerable demostrando que la siguiente función es biyectiva:

$$f: \mathbf{N} \to B$$
$$f(n) = g(mín\{i \in \mathbf{N} \mid g(i) \in B - \{f(m) \mid m < n\}\})$$

Solución: La definición de la función f que aparece en el enunciado es equivalente a la que sigue, que es la que usaremos:

$$f(n) = g(mín\{g^{-1}(\beta) \mid \beta \in B - \{f(m) \mid m < n\}\})$$

Para ver que la función es biyectiva, probaremos que es inyectiva y que es sobreyectiva.

Demostración de que f es inyectiva: Supongamos que tenemos $x,y \in \mathbf{N}$, con $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x<y$ (en caso contrario cambiaríamos x por y). En tal caso,

$$f(x) \in \{f(m) \mid m < y\} \Rightarrow f(x) \notin B - \{f(m) \mid m < y\} \Rightarrow ...$$

Como g^{-1} existe y es biyectiva por ser g biyectiva, podemos escribir:

$$... \Rightarrow g^{-1}(f(x)) \notin \{g^{-1}(\beta) \mid \beta \in B - \{f(m) \mid m < y\}\} \Rightarrow ...$$

Por definición de mínimo de un conjunto, un elemento que no pertenece al conjunto no puede ser su mínimo:

$$... \Rightarrow g^{-1}(f(x)) \neq mín\{g^{-1}(\beta) \mid \beta \in B - \{f(m) \mid m < y\}\} \Rightarrow ...$$

Por definición de f y recordando que g^{-1} es biyectiva, podemos escribir:

$$... \Rightarrow g^{-1}(f(x)) \neq g^{-1}(f(y)) \Rightarrow ...$$

Como g es biyectiva, se llega a:

$$... \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Demostración de que f es sobreyectiva: Por reducción al absurdo, supongamos que f no es sobreyectiva. En tal caso, existe b∈B de tal modo que:

$$\forall n \in \mathbf{N}, b \neq f(n) \Rightarrow ...$$

Como b∈B, se tendrá:

$$... \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}, b \in B - \{f(m) \mid m < n\} \Rightarrow ...$$

Como g^{-1} existe y es biyectiva por ser g biyectiva, podemos escribir:

$$... \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}, g^{-1}(b) \in \{g^{-1}(\beta) \mid \beta \in B - \{f(m) \mid m < n\}\} \Rightarrow ...$$

Por definición de mínimo de un conjunto, un elemento que pertenece al conjunto debe ser mayor o igual que el mínimo del conjunto:

$$... \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}, g^{-1}(b) \geq mín\{g^{-1}(\beta) \mid \beta \in B - \{f(m) \mid m < n\}\} \Rightarrow ...$$

Por definición de f y recordando que g^{-1} es biyectiva, podemos escribir:

$$... \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}, g^{-1}(b) \geq g^{-1}(f(n)) \Rightarrow ...$$

Como g^{-1}(b)∈$\mathbf{N}$, tendremos:

$$... \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}, g^{-1}(f(n)) \in \{0,1,..., g^{-1}(b)\} \Rightarrow ...$$

Dado que $\{0,1,...,g^{-1}(b)\}$ es finito, mientras que **N** es infinito (aplicaríamos una extensión del principio de los casilleros con el conjunto mayor infinito y el conjunto menor finito):

$$... \Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbf{N} \mid n_1 \neq n_2 \wedge g^{-1}(f(n_1)) = g^{-1}(f(n_2)) \Rightarrow ...$$

Como g es biyectiva, se deduce que:

$$... \Rightarrow \exists n_1, n_2 \in \mathbf{N} \mid n_1 \neq n_2 \wedge f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow ...$$

Por definición de función inyectiva,

$$...\Rightarrow f \text{ no es inyectiva}$$

Pero esto es absurdo, porque en el apartado anterior hemos demostrado que f es inyectiva. Con esto concluye la demostración por reducción al absurdo y concluimos que f es sobreyectiva.

Ejercicio: Sea $\Sigma=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ un alfabeto. Demuestre que la función

$$f\colon \Sigma^* \rightarrow \mathbf{N}$$

$$f(w) = \sum_{j=1}^{|w|} n^{|w|-j} \cdot i_j$$

$$w = \sigma_1\sigma_2...\sigma_{|w|},\ \sigma_j = a_{i_j}$$

es biyectiva.

Solución: Demostraremos primero que es inyectiva y después que es sobreyectiva.

Demostración de que f es inyectiva: Vamos a demostrar por inducción sobre |w| que $f(w)=f(w') \Rightarrow w=w'$, lo cual probará que f es inyectiva.

–Caso base, |w|=0. En tal caso $w=\varepsilon \Rightarrow f(w)=0 \Rightarrow f(w')=0 \Rightarrow w'=\varepsilon \Rightarrow w=w'$

–Hipótesis de inducción. Sea $n\in\mathbf{N}$. Suponemos que $\forall w\in\Sigma^* \mid |w|\leq n$, se cumple que: $f(w)=f(w') \Rightarrow w=w'$.

–Paso inductivo (n+1). Sea $w\in\Sigma^*$, con $|w|=n+1$, y sea $w'\in\Sigma^*$, donde $f(w)=f(w')$. El índice en el alfabeto del j-ésimo símbolo de w lo notaremos i_j, y el del k-ésimo símbolo de w' lo notaremos i'_k. Por definición de f tendremos:

$$i_{|w|} \bmod n = i'_{|w'|} \bmod n \Rightarrow ...$$

Como $i_{|w|}, i'_{|w'|}\in\{1,2,...,n\}$ por ser índices en el alfabeto, se tendrá:

$$... \Rightarrow i_{|w|} = i'_{|w'|} \Rightarrow ...$$

Esto quiere decir que el último símbolo de w y w' coincide. Por tanto:

$$... \Rightarrow w = u\sigma \wedge w' = u'\sigma \wedge f(u) = f(u') \Rightarrow ...$$

Como |u|=n, podemos aplicar la H.I. a u y u', con lo que nos queda:

$$... \Rightarrow w = u\sigma \wedge w' = u'\sigma \wedge u = u' \Rightarrow w = w'$$

Demostración de que f es sobreyectiva: Vamos a demostrar por inducción sobre b que existe $f^{-1}(b)$, lo cual equivale a probar que f es sobreyectiva. Tendremos varios casos base, puesto que tendremos que remontarnos a casos con valores muy bajos de b para completar el paso inductivo.

–Caso base (b=0). $f^{-1}(b)=f^{-1}(0)=\varepsilon$.

–Casos base (b=1,...,n). $f^{-1}(b)=a_b$.

–Hipótesis de inducción. Suponemos que existe $f^{-1}(\beta)$ $\forall\beta\in\{0,1,...,b\}$, donde $b\geq n$.

–Paso inductivo (b+1). Hay que probar la propiedad para b+1, con b≥n. Para ello debemos hallar w en la siguiente ecuación:

$$f(w) = b + 1 \Rightarrow ...$$

El índice en el alfabeto del *j*-ésimo símbolo de w lo notaremos i_j. Por definición de *f*, esto implica que:

$$... \Rightarrow i_{|w|} \text{ mod } n = (b+1) \text{ mod } n \Rightarrow ...$$

Aplicando las propiedades del operador módulo y recordando que $i_{|w|} \in \{1,2,...,n\}$ por ser un índice en el alfabeto tenemos:

$$... \Rightarrow i_{|w|} = (b \text{ mod } n) + 1 \qquad [1]$$

Llegados a este punto ya sabemos cuál debe ser el último símbolo de w, que viene dado por [1]. Para hallar el resto de los símbolos tendremos:

$$w = ua_{i_{|w|}} \qquad [2]$$

$$f(u) = (b + 1 - i_{|w|}) \text{div } n \qquad [3]$$

Como $i_{|w|} \in \{1,2,...,n\}$, se tiene que :

$$b + 1 - n \le b + 1 - i_{|w|} \le b \Rightarrow ((b+1) \text{ div } n) - 1 \le (b + 1 - i_{|w|}) \text{div } n \le b \text{ div } n \Rightarrow ...$$

Como b≥n, obtenemos:

$$... \Rightarrow 0 \le (b + 1 - i_{|w|}) \text{div } n \le b \text{ div } n \le b$$

Por consiguiente $(b+1-i_{|w|})$ div n entra dentro de las condiciones de la hipótesis de inducción, con lo cual la aplicamos y obtenemos que la ecuación [3] tiene solución. Sustituyendo la solución obtenida para u en [2] se obtendría el valor de w, que es lo que buscábamos: w = f^{-1}(b+1).

Ejercicio: Demostrar que $\|2^{\mathbf{N}}\| = \aleph_1$.

Solución: Vamos a trabajar con el intervalo cerrado de números reales [0,1], ya que su cardinal es $\aleph_1$. Para probar esto basta con ver que $(0,1) \subset [0,1] \subset \mathbf{R}$ y que $\|(0,1)\| = \|\mathbf{R}\| = \aleph_1$. Por lo tanto, nuestro objetivo es definir una biyección entre [0,1] y $2^{\mathbf{N}}$. Una posible biyección es la que sigue:

$$f : [0,1] \to 2^{\mathbf{N}}$$

$$f(0'd_0 d_1 d_2 ...) = \{n \in \mathbf{N} \mid d_n = 1\}$$

donde el número real viene dado por su expresión decimal en base 2 (si hay dos expresiones decimales posibles, elegimos la que tiene infinitos unos hacia la derecha). Demostremos que esta función es biyectiva:

Demostración de que f es inyectiva: Supongamos que existen $x,y \in [0,1]$ tales que *f(x)=f(y)*. Por definición de *f* esto quiere decir que las expresiones decimales en base 2 de *x* e *y* coinciden. Pero como dos números distintos no pueden tener la misma expresión decimal en ninguna base, concluimos que *x=y*.

Demostración de que f es sobreyectiva: Sea $C \in 2^{\mathbf{N}}$ un conjunto de números naturales. La preimagen de *C* vendrá dada por:

$$f^{-1}(C) = 0'd_0 d_1 d_2 ...$$

$$\forall n \in \mathbf{N}, d_n = \begin{cases} 0, \text{si } n \notin C \\ 1, \text{si } n \in C \end{cases}$$