

Gramáticas difusas de formas

Manuela Ruiz-Montiel, José Luis Pérez-de-la-Cruz, Lawrence Mandow, and
Fernando López-Romero

ETSI Informática, Universidad de Málaga. Campus de Excelencia Internacional
Andalucía Tech

`mruiz@lcc.uma.es`, `perez@lcc.uma.es`, `lawrence@lcc.uma.es`

Resumen En este trabajo presentamos una generalización difusa del concepto de computación o derivación en una gramática de formas. Primeramente presentamos las ideas en abstracto y posteriormente describimos una implementación software y algunos ejemplos generados por ella. Finalizamos señalando algunas posibles aplicaciones de este formalismo.¹

Key words: gramática de formas, software, lógica difusa

1. Introducción

Las gramáticas de formas son un formalismo generativo de carácter gráfico bien conocido y empleado en los campos del diseño arquitectónico e industrial. Mediante ellas se pueden definir estilos arquitectónicos, generar diseños industriales, etc.

La principal contribución de este trabajo es la definición teórica de varias clases de computación difusa con gramáticas de formas, así como la implementación de un sistema software para comprobar la validez y aplicabilidad de estos conceptos.

En la siguiente sección presentamos los antecedentes nítidos del trabajo aquí presentado. A continuación, en la sección 3 planteamos su generalización al caso difuso y en la sección 4 presentamos la herramienta software que hemos desarrollado. Finalmente señalamos algunas posibles continuaciones de este trabajo y discutimos algunas posibles aplicaciones.

2. Antecedentes

Las gramáticas de formas [1] [2] son un formalismo empleado para analizar y definir estilos arquitectónicos [3] [4] y diseños industriales [5] [6] [7], para llevar a cabo investigaciones en el campo de la Estética [8], o para generar imágenes en mundos virtuales [9], por citar solamente algunas de sus aplicaciones.

Según Stiny [10], una gramática de formas es una 4-tupla $\langle S, L, R, I \rangle$ donde:

¹ La presentación de este trabajo está subvencionada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Málaga - Campus de Excelencia Internacional Andalucía Tech.

- S es un conjunto finito de formas
- L es un conjunto finito de símbolos
- R es un conjunto finito de reglas $\alpha \rightarrow \beta$, donde α es una forma etiquetada no vacía y β es una forma etiquetada
- I es una forma etiquetada no vacía llamada *forma inicial* o *axioma*.

Una *forma* s se define como un conjunto finito de segmentos \overline{AB} –a los que también denominaremos en este contexto *líneas*– que cumple las siguientes condiciones (nótese que \overline{AB} y \overline{BA} son dos nombres diferentes de un mismo segmento):

- (1) Si $\overline{P_1P_2}, \overline{P_3P_4} \in s$ y su intersección es el punto E , entonces para cada i ($1 \leq i \leq 4$), si $X_i \neq E$, $\overline{X_iE} \in s$.
- (2) Si $\overline{AB}, \overline{CD} \in s$ y $\overline{AB} \subsetneq \overline{CD} \in s$, y $A \neq C$, $A \neq D$, entonces existe $\overline{AE} \in s$ tal que A, E, B no son colineales.

De esta forma la representación de una forma como conjunto de líneas es única. En este trabajo consideramos únicamente formas en \mathbb{R}^2 , aunque los mismos conceptos pueden definirse en cualquier dimensión.

Una *forma etiquetada* σ es un par $\langle s, P \rangle$ donde s es una forma y P es un conjunto finito de *puntos etiquetados*. Un punto etiquetado es un par (p, A) donde $p \in \mathbb{R}^2$ es un punto y $A \in L$ es un símbolo o *etiqueta*. Si p es un punto etiquetado de σ o el punto extremo de una línea de σ , decimos que p es un punto distinguido de σ .

Sean dos formas etiquetadas s_1, s_2 . Se dice que s_1 es una subforma etiquetada de s_2 y se representa $s_1 \leq_e s_2$ si y solo si se cumplen estas dos condiciones: (i) los puntos etiquetados de s_1 constituyen un subconjunto de los puntos etiquetados de s_2 ; (ii) las líneas de s_1 constituyen un subconjunto de las líneas de s_2 . Si solamente se cumple (ii) decimos que s_1 es una subforma de s_2 y escribimos $s_1 \leq s_2$.

Una regla es un par (α, β) , que representaremos como $\alpha \rightarrow \beta$. Si $\alpha \leq \beta$ se dice que la regla es aditiva. En lo sucesivo solo consideraremos reglas aditivas.

Una regla $\alpha \rightarrow \beta$ es aplicable a una forma etiquetada γ cuando existe una transformación geométrica τ tal que $\tau(\alpha)$ es una subforma etiquetada de γ , es decir, $\tau(\alpha) \leq_e \gamma$. Las transformaciones geométricas que permitiremos serán las que conservan los ángulos, es decir, cualquier composición de giros, simetrías, traslaciones y escalados uniformes.

Supongamos que la regla $\alpha \rightarrow \beta$ es aplicable a γ en virtud de la transformación τ . La forma etiquetada producida por la aplicación de la regla a γ bajo la transformación τ es $(\gamma - \tau(\alpha)) \cup \tau(\beta)$, donde las operaciones $-$ y \cup se aplican a cada uno de los dos elementos que definen la forma (o sea, tanto al conjunto de líneas como al conjunto de etiquetas). Es decir, se sustituyen en la forma γ los elementos de $\tau(\alpha)$ por los de $\tau(\beta)$. En el caso de las gramáticas aditivas la fórmula anterior es equivalente a $\gamma \cup \tau(\beta - \alpha)$.

Nótese que si la regla es aplicable está garantizado que todas las líneas y etiquetas de $\tau(\alpha)$ están en γ . Nótese también que pueden existir muchas formas diferentes de aplicar una misma regla a una misma forma γ , una para cada transformación τ que embebe α dentro de γ .

Una *derivación* o *computación* es una sucesión finita de formas $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ donde $\gamma_0 = I$ (el axioma de la gramática) y para todo $i, 0 < i \leq n$, γ_i se obtiene por la aplicación a γ_{i-1} de alguna regla de la gramática. En la figura 1 se muestra una gramática formada por una sola regla y una derivación a partir del axioma de la gramática (un cuadrado).

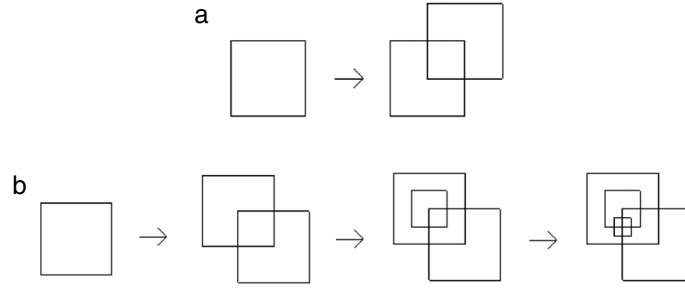


Figura 1. Una regla (a) y una derivación (b)

3. Gramáticas de forma y cálculos difusos

En esta sección generalizaremos las ideas expuestas en la sección 2 y aplicaremos diversas construcciones difusas al concepto de gramática de formas. Hasta lo que alcanza nuestro conocimiento, esta generalización de las gramáticas de forma al caso difuso no ha sido llevada a cabo anteriormente.

Distinguiremos dos posibles fuentes de difuminación: la aplicación difusa de reglas (3.1) y la correspondencia difusa de formas(3.2).

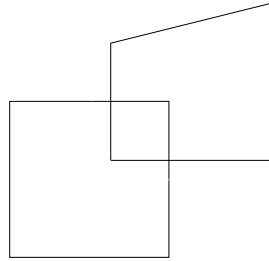


Figura 2. Aplicación difusa de la regla de la Figura 1.a

3.1. Aplicación difusa

Como hemos dicho más arriba, la forma etiquetada producida por la aplicación de la regla $\alpha \rightarrow \beta$ a γ bajo la transformación τ es $\gamma \cup \tau(\beta - \alpha)$, suponiendo que la gramática es aditiva.

Supongamos ahora que para cada punto $P \in \mathbb{R}^2$ está definido un conjunto difuso D_P con núcleo $\{P\}$. Modificaremos la definición “forma producida por la aplicación de una regla” de la siguiente manera:

La forma etiquetada producida por la aplicación de la regla $\alpha \rightarrow \beta$ a γ bajo la transformación τ con grado μ es $\gamma \cup (\varphi_\mu \circ \tau)(\beta - \alpha)$ donde φ_μ es una transformación que transforma cada punto distinguido P de σ en P' tal que para todo P es $D_P(P') \geq \mu$ y para al menos un P es $D_P(P') = \mu$.

Por ejemplo, supongamos la regla de la Figura 1. Supongamos que para cada punto P , D_P es un subconjunto difuso de \mathbb{R}^2 dado por la función de pertenencia

$$D_P(A) = \frac{1}{1 + d(P, A)}$$

donde $d(P, A)$ es la distancia euclídea entre A y P . Entonces, la forma de la Figura 2 también ha sido producida en un paso desde el axioma, pero no con grado 1. Si suponemos que la distancia de cada nuevo vértice al vértice “exacto” generado por la regla es 1, entonces la figura ha sido generada con grado 0,5.

De esta manera, la aplicación difusa de una regla a una forma bajo una transformación define no una forma, sino un conjunto difuso de formas, cada una de las cuales pertenece al conjunto con el grado μ así definido. Y si en la derivación $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ cada regla se ha aplicado respectivamente con grado μ_1, \dots, μ_n , entonces γ_n ha sido generado con grado $\mu = \min(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Las definiciones anteriores no son siempre apropiadas, pues el conjunto D_P se supone independiente del tamaño que vaya adquiriendo la forma. Puede ser más conveniente introducir un factor de escala que tenga en cuenta este tamaño y considerar, en lugar de $d(A, P)$,

$$\delta(A, P) = \frac{d(A, p)}{\text{Diam}(\sigma)}$$

donde $\text{Diam}(\sigma)$ es el diámetro de la forma σ , es decir, la máxima distancia entre dos puntos distinguidos de σ .

En la figura 3 se muestra una derivación difusa empleando la regla de la Figura 1 con grado 0,5 (es decir, con $\delta = 0,5$).

3.2. Correspondencia difusa

En la derivación de la Figura 3 se puede observar que la correspondencia de la parte derecha α de la regla se ha producido siempre empleando la subforma de γ correspondiente al axioma, en cuyas esquinas se han ido añadiendo subformas. A estas subformas no ha sido posible aplicar la regla. Ello es lógico, ya que de una parte para aplicar la regla exigimos una correspondencia exacta entre

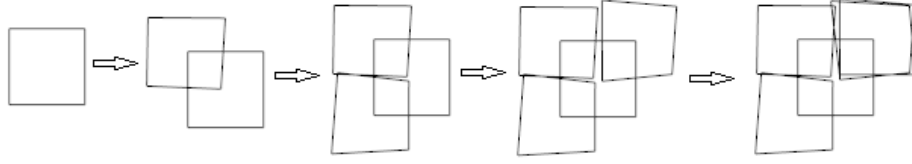


Figura 3. Una derivación difusa (regla de la Figura 1) con $\delta = 0,5$

$\tau(\alpha)$ y el fragmento considerado de γ y de otra las subformas añadidas no son exactamente cuadradas. Esto nos indica que es necesario modificar otro aspecto de la computación para obtener derivaciones difusas generales.

Comenzaremos definiendo la discordancia entre una subforma y una forma. En las computaciones con gramáticas de formas, para hacer coincidir dos formas podemos aplicar cualquier transformación que conserve los ángulos. Por tanto, parece lógico establecer que la discrepancia entre dos formas venga dada esencialmente por las discordancias entre los ángulos correspondientes de ambas.

Sea un ángulo φ de vértice el punto V y lados las semirrectas r_1, r_2 . Sea otro ángulo φ' con el mismo vértice y lados las semirrectas r'_1, r'_2 . Consideremos los dos ángulos φ_1, φ_2 de vértice V y lados las semirrectas r_1, r'_1 y r_2, r'_2 , respectivamente. Llamaremos *discordancia* $\varepsilon(\varphi, \varphi')$ entre φ y φ' al valor absoluto de la diferencia de sus amplitudes,

$$\varepsilon(\varphi, \varphi') = ||\varphi| - |\varphi'|||.$$

Por ejemplo, la discordancia entre los ángulos (V, r_1, r_2) y (V, r'_1, r'_2) de la Figura 4.a es $\pi/6$ y entre los ángulos (V, r_1, r_2) y (V, r'_1, r'_2) de la Figura 4.b es 0.

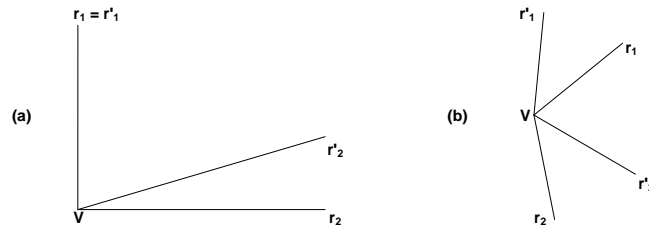


Figura 4. Discordancia entre ángulos

Consideremos ahora una tupla T de t puntos diferentes, $T = (p_1, \dots, p_t)$. Para cada i, j, k ($1 \leq i \leq t$, $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$), definimos el ángulo T_{ijk} de vértice p_i y lados las semirrectas que pasan por p_j, p_k . Sean dos tuplas T, T' de t puntos. Definiremos la discordancia entre T y T' como $\varepsilon(T, T') = \max \varepsilon(T_{ijk}, T'_{ijk})$.

A partir del concepto de discordancia entre tuplas de puntos podemos definir el de discordancia entre dos formas etiquetadas S, S' de igual número de puntos distinguidos. Para ello basta considerar las discordancias entre (1) una tupla T formada por los t puntos distinguidos de S ; y (2) las tuplas T' formadas por t puntos distinguidos de la forma tales que (i) puntos correspondientes de T y T' tienen las mismas etiquetas; (ii) si dos puntos de T son extremos de una misma línea, entonces los puntos correspondientes de T' también son extremos de una misma línea. Si no existe ninguna tupla de las definidas en (2), la discordancia es ∞ . En otro caso, será la mínima de las así definidas.

La discordancia ε entre formas permite definir el grado μ de correspondencia difusa entre las mismas como $\mu(\varepsilon)$, que valdrá 1 para $\varepsilon = 0$ y 0 para $\varepsilon = \infty$. Por ejemplo, podemos definir

$$\mu(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\pi - 2\varepsilon}{\pi} & \text{si } \varepsilon < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \varepsilon \geq \pi/2 \end{cases}$$

Ya podemos enunciar el criterio difuso de aplicabilidad de una regla:

Si existe una subforma en $\gamma' \leq_e \gamma$ tal que la discordancia entre γ' y α es ε , entonces la regla $\alpha \rightarrow \beta$ es aplicable a γ con grado $\mu(\varepsilon)$.

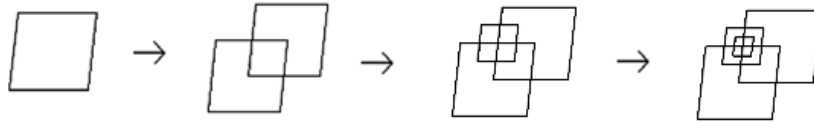


Figura 5. Una derivación difusa (regla de la Figura 1) con $\varepsilon = 0,2$

Esta manera de definir el grado de correspondencia entre dos formas es coherente con los algoritmos realmente empleados para resolver en el caso nítido el problema de la *detección de subformas* [11] [12], [13], en cuya resolución se consume la mayor parte del tiempo de ejecución de una gramática de formas.

Definido ya el grado de aplicabilidad, es necesario ahora definir la transformación τ bajo la cual se aplica la regla a la forma. Esta transformación será la transformación afín que mejor transforme el conjunto de puntos de α , $\{p_1, \dots, p_t\}$ en la subforma considerada de γ , cuyos puntos serán $\{d_1, \dots, d_t\}$. Tomaremos como criterio el de la suma de mínimos cuadrados. Es decir, aplicaremos a cada punto de coordenadas (x, y) una transformación dada por una matriz A no singular y un vector \mathbf{b}

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

tales que se minimiza el error e ,

$$e = \sum_{k=1}^t ((p'_{xk} - d_{xk})^2 + (p'_{yk} - d_{yk})^2)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los puntos p de la subforma. De esta manera, la aplicación de una regla a una forma permitiendo una discordancia ε define no una forma, sino un conjunto difuso de formas, cada una de las cuales pertenece al conjunto con el grado $\mu(\varepsilon)$ así definido. Y si en la derivación $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ se han permitido respectivamente las discordancias $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, entonces γ_n ha sido generado con grado $\mu = \min(\mu(\varepsilon_1), \dots, \mu(\varepsilon_n))$.

En la Figura 5 aparece una derivación a partir de un paralelogramo aplicando la regla de la Figura 1.

Por último, es posible definir derivaciones en las que tanto la aplicación de las reglas como su grado de aplicabilidad son difusos. En este caso, si en la derivación $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ cada regla se ha aplicado respectivamente con grado μ_1, \dots, μ_n , y se han permitido respectivamente las discordancias $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, entonces γ_n ha sido generado con grado $\mu = \min(\mu_1, \dots, \mu_n, \mu(\varepsilon_1), \dots, \mu(\varepsilon_n))$.

Un ejemplo de esta derivación “doblemente difusa” se muestra en la Figura 6.

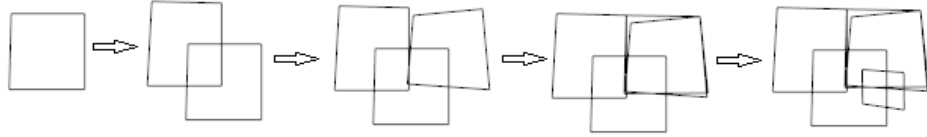


Figura 6. Una derivación difusa (regla de la Figura 1) con $\epsilon = 0,5$ y $\delta = 0,5$

4. Una herramienta software: FuzzyShade

Para llevar a la realidad los anteriores conceptos hemos diseñado una herramienta software llamada FuzzyShade. FuzzyShade se ha implementado como un *plug-in* del entorno de modelado gráfico SketchUp [14] y puede considerarse una versión de Shade [15] con características adicionales. En la Figura 7 se muestra el aspecto general de la pantalla de interacción con la herramienta.

En la parte izquierda del lienzo se lleva a cabo la edición de las reglas de la gramática, mientras que en la parte derecha se muestra el resultado de la computación, es decir, la forma resultante de la derivación en curso.

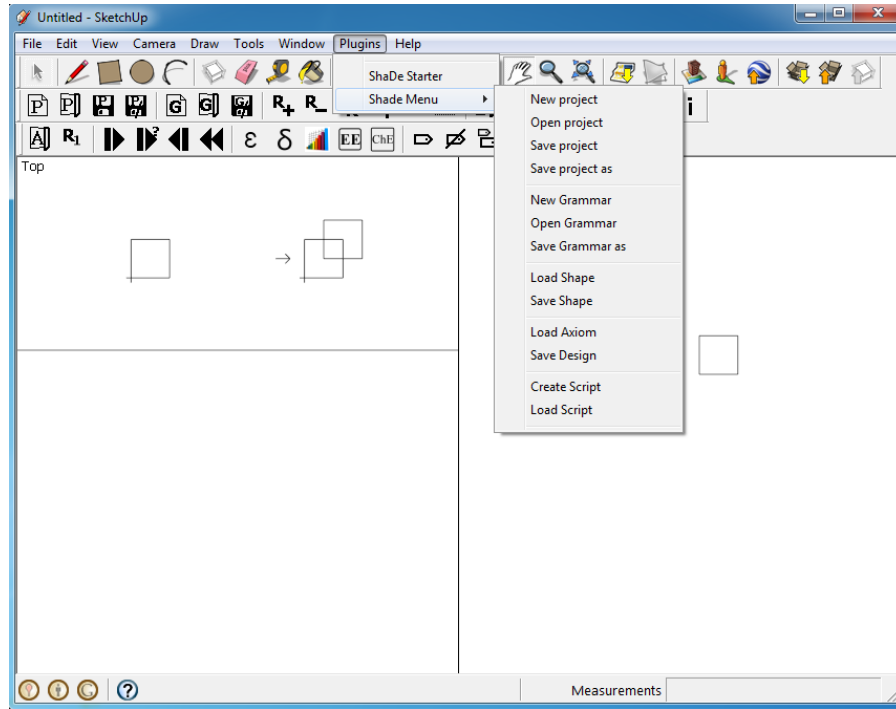


Figura 7. Captura de pantalla de FuzzyShade

En la barra de herramientas aparecen las opciones que permiten la realización de computaciones difusas. El botón etiquetado con ϵ controla el grado de correspondencia entre formas para aplicar las reglas de la gramática. El valor se establece en radianes y por defecto es 0. El botón etiquetado con δ controla el grado de difusión en la aplicación de las reglas de la gramática. Su valor por defecto es 0,01. Otro botón permite consultar los valores actuales de ambos parámetros y también muestra el grado μ de pertenencia de la forma actual al conjunto definido por la gramática.

La herramienta permite importar gráficos externos vectorizados (formato dxf) y de mapas de bits (formato bmp). Estos gráficos podrían servir como axiomas o puntos de partida en la generación de una forma.

Una característica adicional de la herramienta es la posibilidad de limitar el solapamiento de subformas muy similares. En efecto, es posible aplicar de forma

difusa varias veces la misma regla con la misma transformación a la misma subforma, obteniendo resultados como el que aparece en la esquina superior derecha de la última forma derivada en la Figura 6. (Nótese que en las computaciones nítidas no puede darse este fenómeno).

Para evitar estos resultados, la herramienta proporciona una opción (botón) de “overlapping”. Mediante él pueden establecerse un ángulo umbral y una distancia umbral. Cuando la opción está activada, no son añadidas las formas generadas por una regla que difieren menos del umbral de alguna subforma ya existente.

5. Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo hemos mostrado de forma teórica y práctica algunas posibilidades de emplear las gramáticas de forma como formalismo para la generación de manera difusa de formas geométricas bidimensionales.

Una posible aplicación de estos mecanismos es la generación de objetos suficientemente variados, que —en la línea de los estudios citados en la sección 2— respondan a un estilo o propósito determinado, pero evitando el exceso de uniformidad. Ello podría conseguirse estableciendo adecuadamente los parámetros de difuminación.

Otra posible aplicación es el empleo de estos formalismos como *reconocedores* de forma que pudieran usarse en aplicaciones de reconocimiento de formas tolerantes al ruido. Esta aplicación sería muy interesante; sin embargo, debemos señalar que el uso de las gramáticas de forma como reconocedores es a priori bastante difícil desde el punto de vista algorítmico.

Referencias

1. Stiny, G., Gips, J.: Shape grammars and the generative specification of painting and sculpture. In: Information Processing 71. North-Holland (1972) 1460–1465
2. Stiny, G.: Shape. Talking about seeing and doing. MIT Press, Cambridge, Ma. (2006)
3. Stiny, G., Mitchell, W.J.: The palladian grammar. Environment and planning B **5** (1978) 5–18
4. Duarte, J.P.: A discursive grammar for customizing mass housing: the case of Siza’s houses at Malagueira. Automation in Construction **14** (2005) 265–275
5. Agarwal, M., Cagan, J., Constantine, K.G.: Influencing generative design through continuous evaluation: Associating costs with the coffeemaker shape grammar. Artificial Intelligence in Engineering Design, Analysis and Manufacturing **13** (1999) 253–275
6. Pugliese, M., Cagan, J.: Capturing a rebel: modeling the Harley-Davidson brand through a motorcycle shape grammar. Research in Engineering Design **13** (2002) 139–156
7. McCormack, J.P., Cagan, J., Vogel, C.M.: Speaking the Buick language: capturing, understanding and exploring brand identity with shape grammars. Design Studies **25** (2004) 1–29

8. Stiny, G.: Pictorial and formal aspects of shape and shape grammars and aesthetic system. Birkhauser, Basel and Stuttgart (1975)
9. Muller, P., Wonka, P., Haegler, S., Ulmer, A., Gool, L.V.: Procedural modeling of buildings. *ACM Transactions on Graphics* **25** (2006) 614–623
10. Stiny, G.: Introduction to shape and shape grammars. *Environment and Planning B* **7** (1980) 343–351
11. Krishnamurti, R.: The arithmetic of shapes. *Environment and Planning B* **7** (1980) 463–484
12. Krishnamurti, R.: The construction of shapes. *Environment and Planning B* **8** (1981) 5–40
13. Krishnamurti, R., Giraud, C.: Towards a shape editor: the implementation of a shape generation system. *Environment and Planning B* **13** (1986) 391–404
14. SketchUp: <http://www.sketchup.com/> (2015)
15. Ruiz-Montiel, M., Belmonte, M.V., Boned, J., Mandow, L., Millan, E., Badillo, A., Perez-de-la-Cruz, J.L.: Layered shape grammars. *Computer-Aided Design* **56** (2014) 104–119