

Conjuntos y Sistemas Difusos

(Lógica Difusa y Aplicaciones)

1. Introducción: Conceptos Básicos



E.T.S.I. Informática

J. Galindo Gómez

Introducción

- **Conjuntos Difusos y su Lógica Difusa** (o borrosa):
 - La palabra **fuzzy** viene del inglés *fuzz* (tamo, pelusa, vello) y se traduce por **difuso** o **borroso**.
 - **Lotfi A. Zadeh**: Es el padre de toda esta teoría (Zadeh, 1965).
 - **Importancia**: En la actualidad es un campo de investigación muy importante, tanto por sus implicaciones matemáticas o teóricas como por sus aplicaciones prácticas.
 - **Revistas Int.:** Fuzzy Sets and Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems...
 - **Congresos:** FUZZ-IEEE, IPMU, EUSFLAT, ESTYLF...
 - **Bibliografía Gral.:** (Kruse, 1994), (McNeill, 1994), (Mohammed, 1993), (Pedrycz, 1998)...
 - **Problemas Básicos subyacentes:**
 - **Conceptos SIN definición clara:** Muchos conceptos que manejamos los humanos a menudo, no tienen una definición clara: ¿Qué es una persona alta? ¿A partir de qué edad una persona deja de ser joven?
 - **La lógica clásica o bivaluada es demasiado restrictiva:** Una afirmación puede no ser ni VERDAD (*true*) ni FALSA (*false*).
 - “Yo leeré El Quijote”: ¿En qué medida es cierto? Depende de quien lo diga y...
 - “Él es bueno en Física”: ¿Es bueno, muy bueno o un poco mejor que regular?
 - **Otras Herramientas con las que se ha usado:** Sistemas basados en Reglas, Redes Neuronales, Algoritmos Genéticos, Bases de Datos...

Introducción

- **¿Cuándo usar la tecnología fuzzy o difusa?** (Sur, Omron, 1997)
 - En procesos complejos, si no existe un modelo de solución sencillo.
 - En procesos no lineales.
 - Cuando haya que introducir la experiencia de un operador “experto” que se base en conceptos imprecisos obtenidos de su experiencia.
 - Cuando ciertas partes del sistema a controlar son desconocidas y no pueden medirse de forma fiable (con errores posibles).
 - Cuando el ajuste de una variable puede producir el desajuste de otras.
 - En general, cuando se quieran representar y operar con conceptos que tengan imprecisión o incertidumbre (como en las Bases de Datos Difusas).
- **Aplicaciones** (Sur, Omron, 1997; Zimmermann, 1993):
 - **Control de sistemas:** Control de tráfico, control de vehículos (helicópteros...), control de compuertas en plantas hidroeléctricas, centrales térmicas, control en máquinas lavadoras, control de metros (mejora de su conducción, precisión en las paradas y ahorro de energía), ascensores...
 - **Predicción y optimización:** Predicción de terremotos, optimizar horarios...
 - **Reconocimiento de patrones y Visión por ordenador:** Seguimiento de objetos con cámara, reconocimiento de escritura manuscrita, reconocimiento de objetos, compensación de vibraciones en la cámara
 - **Sistemas de información o conocimiento:** Bases de datos, sistemas expertos...

3

Introducción: Conjuntos Crisp y Difusos

- **Conceptos sobre Conjuntos Difusos:**
 - Surgieron como una nueva forma de representar la **imprecisión** y la **incertidumbre**.
 - **Herramientas que usa:** Matemáticas, Probabilidad, Estadística, Filosofía, Psicología...
 - Es un puente entre dos tipos de computaciones:
 - **C. Numérica:** Usada en aplicaciones científicas, por ejemplo.
 - **C. Simbólica:** Usada en todos los campos de la **Inteligencia Artificial**.
- **Conjuntos Clásicos (crisp):** Surgen de forma natural, por la necesidad del ser humano de clasificar objetos y conceptos.
 - **Conjunto de Frutas:** Manzana \in Frutas, Lechuga \notin Frutas...
 - **Función de pertenencia** $A(x), x \in X$:
 - X es el **Universo de Discurso**.
 - **Restricción de la Función A:** $X \rightarrow \{0,1\}$
 - **Conjunto Vacío** $\forall x \in X, A(x)=0$
 - **Conjunto Universo** $\forall x \in X, A(x)=1$
- **Conjuntos Difusos (fuzzy):** Relajan la restricción, $A: X \rightarrow [0,1]$
 - **Hay conceptos que no tienen límites claros:**
 - ¿La temperatura 25°C es “alta”?
 - Definimos, por ejemplo: Alta(30)=1, Alta(10)=0, Alta(25)=0.75...

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

4

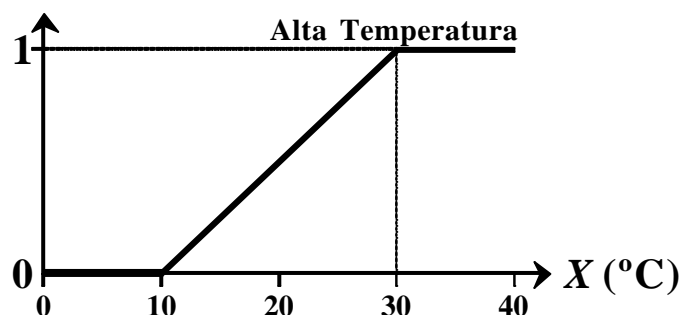
Conjuntos Difusos: Definición

- **Definición:** Un conjunto difuso A se define como una **Función de Pertenencia** que enlaza o empareja los elementos de un dominio o Universo de discurso X con elementos del intervalo $[0,1]$:
 - $A: X \rightarrow [0,1]$
- **Cuanto más cerca esté $A(x)$ del valor 1, mayor será la pertenencia del objeto x al conjunto A .**
 - Los valores de pertenencia varían entre **0 (no pertenece en absoluto) y 1 (pertenencia total)**.
- **Representación:** Un conjunto difuso A puede representarse como un conjunto de pares de valores: Cada elemento $x \in X$ con su grado de pertenencia a A . También puede ponerse como una “suma” de pares:
 - $A = \{ A(x)/x, x \in X \}$
 - $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^n A(x_i)/x_i$ (Los pares en los que $A(x_i)=0$, no se incluyen)
- **Ejemplo:** Conj. de alturas del concepto difuso “Alto” en Personas:
 - $A = 0.25/1.75 + 0.5/1.8 + 0.75/1.85 + 1/1.9$ (su universo es discreto)
- **Si el Universo es Continuo:** $A = \dot{\bigcup}_x A(x)/x$
- La **suma** y la **integral** no deben considerarse como operaciones algebraicas.

5

Conjuntos Difusos: Definición

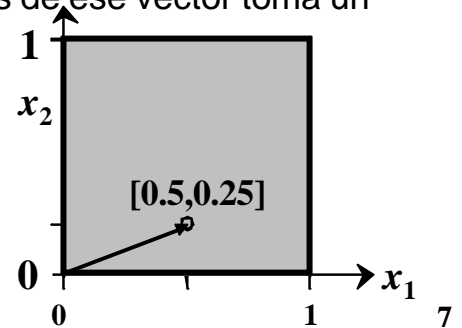
- **Contexto:** Es fundamental en la definición de conjuntos difusos.
 - No es lo mismo el concepto “Alto” aplicado a personas que a edificios.
- **Función de Pertenencia:** Un conjunto difuso puede representarse también **gráficamente** como una función, especialmente cuando el universo de discurso X (o dominio subyacente) es continuo (no discreto).
 - **Abcisas (eje X):** Universo de discurso X .
 - **Ordenadas (eje Y):** Grados de pertenencia en el intervalo $[0,1]$.
- **Ejemplo:** Concepto de Temperatura “Alta”.



6

Conj. Difusos: Interpretación de Kosko (1992)

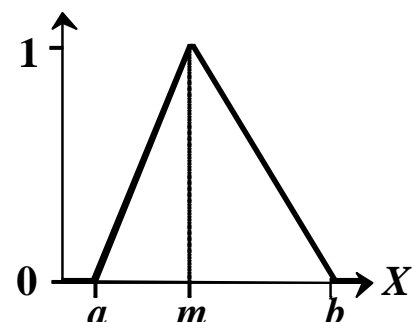
- Un Universo X es un conjunto (finito o infinito) de valores.
 - Por ejemplo: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde X tiene n valores.
- Cada subconjunto de X es miembro del conjunto potencia de X , denotado como $P(X)$ o 2^X .
 - $P(X)$ tiene 2^n elementos, incluyendo \emptyset (conj. vacío).
 - Cada valor de X puede pertenecer al subconjunto o no pertenecer.
- Cada uno de los 2^n elementos de $P(X)$, puede representarse como un vector de n dimensiones (Kosko, 1992). Forma un hipercubo unidad n -dimensional.
 - **Conjuntos Crisp:** Cada uno de los componentes de ese vector toma un valor en el conjunto $\{1,0\}$, según ese componente de X pertenezca o no a ese elemento de $P(X)$. Ejemplo: El conjunto vacío tiene n ceros $\{0, 0, \dots, 0\}$.
 - **Conjuntos Difusos:** Cada uno de los componentes de ese vector toma un valor en el intervalo $[0,1]$, según ese componente de X pertenezca a ese elemento o no. Existen infinitos valores posibles.
- Ejemplo con $n=2$: $P(X) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$ \otimes
 - **Crisp:** $P(X) = \{[0,0], [0,1], [1,0], [1,1]\}$.
 - Son las 4 esquinas de un cuadrado unidad:
 - **Difuso:** Cubre toda la superficie del cuadrado.



Tipos de Funciones de Pertenencia

- **Función de Pertenencia:** $A: X \otimes [0,1]$
 - Cualquier función A es válida: Su definición exacta depende del **concepto** a definir, del **contexto** al que se refiera, de la **aplicación...**
 - En general, es preferible usar **funciones simples**, debido a que simplifican muchos cálculos y no pierden exactitud, debido a que precisamente se está definiendo un concepto **difuso**.
- **Funciones de Pertenencia Típicas:**
 - **1. Triangular:** Definido por sus límites inferior a y superior b , y el valor modal m , tal que $a < m < b$.

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a, m] \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in (m, b) \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$



- También puede representarse así:

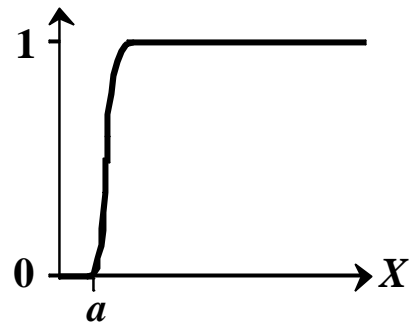
$$A(x; a, m, b) = \max \{ \min \{ (x-a)/(m-a), (b-x)/(b-m) \}, 0 \}$$

Tipos de Funciones de Pertenencia

- **2. Función G (gamma):** Definida por su límite inferior a y el valor $k > 0$.

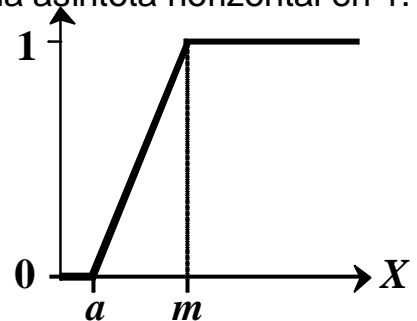
$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - e^{-k(x-a)^2} & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \text{si } x > a \end{cases}$$



- Esta función se caracteriza por un rápido crecimiento a partir de a .
- Cuanto mayor es el valor de k , el crecimiento es más rápido aún.
- La primera definición tiene un crecimiento más rápido.
- Nunca toman el valor 1, aunque tienen una asíntota horizontal en 1.
- Se aproximan linealmente por:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a,m) \\ 1 & \text{si } x \geq m \end{cases}$$



- La función opuesta se llama **Función L**.

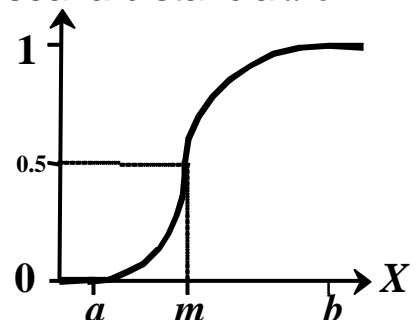
9

Tipos de Funciones de Pertenencia

- **3. Función S:** Definida por sus límites inferior a y superior b , y el valor m , o punto de inflexión tal que $a < m < b$.

- Un valor típico es: $m = (a+b) / 2$.
- El crecimiento es más lento cuanto mayor sea la distancia $a-b$.

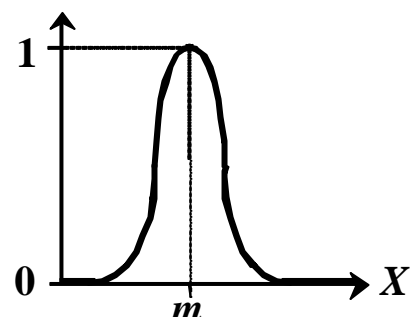
$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 2 \left\{ \frac{(x-a)}{(b-a)} \right\}^2 & \text{si } x \in (a,m) \\ 1 - 2 \left\{ \frac{(x-b)}{(b-a)} \right\}^2 & \text{si } x \in (m,b) \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$



- **4. Función Gaussiana:** Definida por su valor medio m y el valor $k > 0$.

$$A(x) = e^{-k(x-m)^2}$$

- Es la típica campana de Gauss.
- Cuanto mayor es k , más estrecha es la campana.

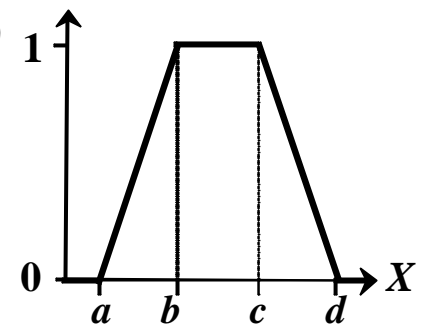


10

Tipos de Funciones de Pertenencia

- **5. Función Trapezoidal:** Definida por sus límites inferior a y superior d , y los límites de su soporte, b y c , inferior y superior respectivamente.

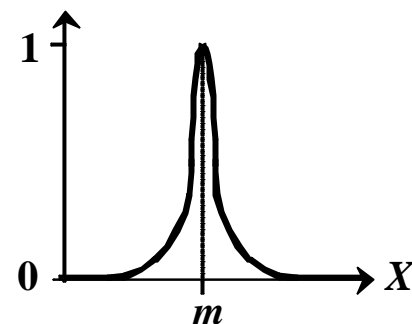
$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x \leq a) \text{ o } (x \geq d) \\ (x - a) / (b - a) & \text{si } x \in (a, b] \\ 1 & \text{si } x \in (b, c) \\ (d - x) / (d - c) & \text{si } x \in (c, d) \end{cases}$$



- **6. Función Pseudo-Exponencial:** Definida por su valor medio m y el valor $k > 1$.

$$A(x) = \frac{1}{1 + k(x - m)^2}$$

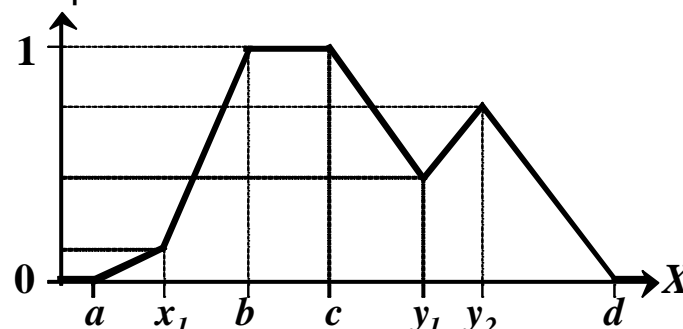
- Cuanto mayor es el valor de k , el crecimiento es más rápido aún y la “campana” es más estrecha.



11

Tipos de Funciones de Pertenencia

- **7. Función Trapecio Extendido:** Definida por los cuatro valores de un trapecio $[a, b, c, d]$, y una lista de puntos entre a y b , o entre c y d , con su valor de pertenencia asociado a cada uno de esos puntos.



- En general, la función **Trapezoidal** se adapta bastante bien a la definición de cualquier concepto, con la ventaja de su fácil definición, representación y simplicidad de cálculos.
- En casos particulares, el **Trapecio Extendido** puede ser de gran utilidad. Éste permite gran expresividad aumentando su complejidad.
- En general, usar **una función más compleja no añade mayor precisión**, pues debemos recordar que se está definiendo un concepto **difuso**.

12

Características de un Conjunto Difuso

- **Altura de un Conjunto Difuso** (*height*): El valor más grande de su función de pertenencia: $\sup_{x \in X} A(x)$.
- **Conjunto Difuso Normalizado** (*normal*): Si existe algún elemento $x \in X$, tal que pertenece al conjunto difuso totalmente, es decir, con grado 1. O también, que: $\text{Altura}(A) = 1$.
- **Soporte de un Conjunto Difuso** (*support*): Elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a 0: $\text{Soporte}(A) = \{x \in X / A(x) > 0\}$.
- **Núcleo de un Conjunto Difuso** (*core*): Elementos de X que pertenecen al conjunto con grado 1: $\text{Nucleo}(A) = \{x \in X / A(x) = 1\}$. Lógicamente, $\text{Nucleo}(A) \subseteq \text{Soporte}(A)$.
- **a-Corte**: Valores de X con grado mínimo a : $A_a = \{x \in X / A(x) \geq a\}$.
- **Conjunto Difuso Convexo o Concavo** (*convex, concave*): Si su función de pertenencia cumple que " $x_1, x_2 \in X$ y " $\lambda \in [0, 1]$:
 - **Convexo**: $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}$.
 - **Concavo**: $A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{A(x_1), A(x_2)\}$.
- **Cardinalidad de un Conjunto Difuso** con un Universo finito (*cardinality*): $\text{Card}(A) = \sum_{x \in X} A(x)$.

Que cualquier punto entre x_1 y x_2 tenga un grado de pertenencia mayor que el mínimo de x_1 y x_2 .

13

Operaciones Unarias sobre C. Difusos

- **Normalización**: Convierte un conj. difuso NO normalizado en uno normalizado, dividiendo por su altura: $\text{Norm}_A(x) = A(x) / \text{Altura}(A)$.
- **Concentración** (*concentration*): Su función de pertenencia tomará valores más pequeños, concentrándose en los valores mayores:
 - $\text{Con}_A(x) = A^p(x)$, con $p > 1$, (normalmente, $p=2$).
- **Dilatación** (*dilation*): Efecto contrario a la concentración. 2 formas:
 - $\text{Dil}_A(x) = A^p(x)$, con $p \in (0, 1)$, (normalmente, $p=0.5$).
 - $\text{Dil}_A(x) = 2A(x) - A^2(x)$.
- **Intensificación del Contraste** (*contrast intensification*): Se disminuyen los valores menores a 1/2 y se aumentan los mayores
 - $\text{Int}_A(x) = \begin{cases} 2^{p-1} A^p(x) & \text{si } A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2^{p-1} (1 - A(x))^p & \text{en otro caso} \end{cases}$
 - Con $p > 1$. Normalmente $p=2$. Cuanto mayor p , mayor intensificación.
- **Difuminación** (*fuzzification*): Efecto contrario al anterior:
 - $\text{Fuzzy}_A(x) = \begin{cases} \sqrt{A(x)/2} & \text{si } A(x) \leq 0.5 \\ 1 - \sqrt{(1 - A(x))/2} & \text{en otro caso} \end{cases}$

14

Relaciones entre Conjuntos Difusos

- **Igualdad (equality):** Dos conjuntos difusos, definidos en el mismo Universo, son iguales si tienen la misma función de pertenencia:

$$A = B \iff A(x) = B(x), \forall x \in X$$
- **Inclusión (inclusion):** Un conjunto difuso está incluido en otro si su función de pertenencia toma valores más pequeños:

$$A \hat{=} B \iff A(x) \leq B(x), \forall x \in X$$
- **Inclusión Difusa:** Si el Universo es finito, podemos relajar la condición anterior para medir el grado en el que un conjunto difuso está incluido en otro (Kosko, 1992):

$$S(A, B) = \frac{1}{\text{Card}(A)} \sum_{x \in X} \max\{0, A(x) - B(x)\}$$

– Ejemplo:

- $A = 0.2/1 + 0.3/2 + 0.8/3 + 1/4 + 0.8/5 \Rightarrow \text{Card}(A) = 3.1$;
- $B = 0.2/2 + 0.3/3 + 0.8/4 + 1/5 + 0.1/6 \Rightarrow \text{Card}(B) = 2.4$;
- $S(A, B) = 1/3.1 \{3.1 - \{0.2+0.1+0.5+0.2+0+0\}\} = 2.1 / 3.1 = 0.68$;
- $S(B, A) = 1/2.4 \{2.4 - \{0+0+0+0+0.2+0.1\}\} = 2.1 / 2.4 = 0.88$;
- B está más incluido en A , que A en B .

15

El Teorema de Representación

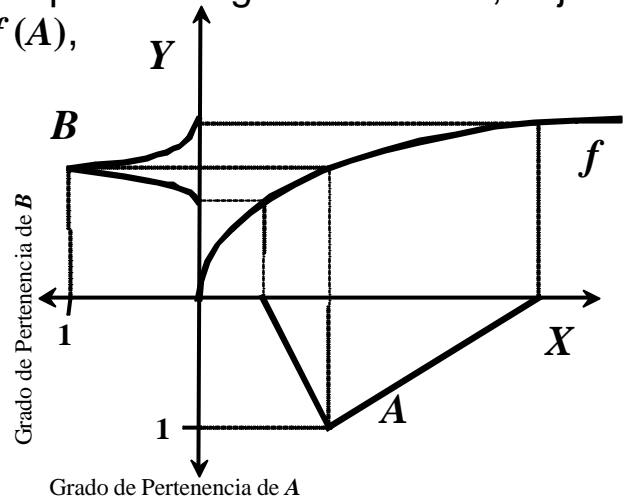
- **Teorema de Representación o Principio de Identidad:** Todo conj. difuso puede descomponerse en una familia de conjs. difusos.
 - Para ello, utilizaremos diversos **a-cortes**, teniendo en cuenta la **Restricción de Consistencia: Si $a_1 > a_2$, entonces $A_{a_1} \hat{=} A_{a_2}$**
 - Cualquier conjunto difuso A puede descomponerse en una serie de sus **a-cortes**: $A = \bigcup_{a \in [0,1]} A_a$
 - o, lo que es lo mismo:
$$A(x) = \sup_{a \in [0,1]} \{a A_a(x)\}$$
 - donde $A_a(x) \in \{0,1\}$, dependiendo de si x pertenece o no al α -corte A_a .
 - **Reconstrucción:** Cualquier conjunto difuso puede reconstruirse a partir de una familia de conjuntos α -cortes anidados.
 - **Conclusiones:**
 - Cualquier problema formulado en el marco de los conjuntos difusos puede resolverse transformando esos conjuntos difusos en su familia de α -cortes anidados, determinando la solución para cada uno usando técnicas no difusas.
 - Resalta que los conjuntos difusos son una generalización.

16

El Principio de Extensión

- **Principio de Extensión** (*Extension Principle*): Usado para transformar conjuntos difusos, que tengan iguales o distintos universos, según una función de transformación en esos universos.
 - Sean X e Y dos conjuntos y f una función de transformación de uno en otro: $f: X \rightarrow Y$
 - Sea A un conjunto difuso en X .
 - El **Principio de Extensión** sostiene que la “imagen” de A en Y , bajo la función f es un conjunto difuso $B=f(A)$, definido como:

$$B(y) = \sup \{ A(x) \mid x \in X, y=f(x) \}$$
 - Ejemplo, representado gráficamente:
 - La función \sup se aplica si existen dos o más valores de x que tengan igual valor $f(x)$.
 - Ese caso no ocurre en el ejemplo.



17

El Principio de Extensión: Generalización

- Se puede **generalizar el Principio de Extensión** para el caso en el que el Universo X sea el producto cartesiano de n Universos:
 - $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$
 - La función de transformación: $f: X \rightarrow Y, y = f(x)$, con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - El **Principio de Extensión** transforma n Conjuntos Difusos A_1, A_2, \dots y A_n , de los universos X_1, X_2, \dots y X_n respectivamente, en un conjunto difuso $B=f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ en Y , definido como:

$$B(y) = \sup \{ \min[A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_n(x_n)] \mid x \in X, y=f(x) \}$$
- **Ejemplos:** Sean X e Y , ambos, el universo de los números naturales.
 - Función **sumar 4:** $y = f(x) = x + 4$:
 - $A = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5$;
 - $B = f(A) = 0.1/6 + 0.4/7 + 1/8 + 0.6/9$;
 - Función **suma:** $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:
 - $A_1 = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5$;
 - $A_2 = 0.4/5 + 1/6$;
 - $B = f(A_1, A_2) = 0.1/7 + 0.4/8 + 0.4/9 + 1/10 + 0.6/11$;

18

Cálculo de la Función de Pertenencia

- Las **Funciones de Pertenencia** pueden calcularse de diversas formas. El método a elegir depende de la aplicación en particular, del modo en que se manifieste la incertidumbre y en el que ésta sea medida durante los experimentos.
 - 1. Método HORIZONTAL:**
 - Se basa en las respuestas de un grupo de N "expertos".
 - La pregunta tiene el formato siguiente: "¿Puede x ser considerado compatible con el concepto A ?".
 - Sólo se acepta un "SÍ" o un "NO", de forma que:

$$A(x) = (\text{Respuestas Afirmativas}) / N.$$
 - 2. Método VERTICAL:**
 - Se escogen varios valores para a , para construir sus **a-cortes**.
 - Ahora la pregunta es la siguiente, efectuada para esos valores de a predeterminados: "¿Identifique los elementos de X que pertenecen a A con grado no menor que a ?".
 - A partir de esos **a-cortes** se identifica el conjunto difuso A (usando el llamado Principio de Identidad o Teorema de Representación).

19

Cálculo de la Función de Pertenencia

- 3. Método de Comparación de Parejas** (Saaty, 1980):
 - Suponemos que tenemos ya el conjunto difuso A , sobre el Universo X de n valores (x_1, x_2, \dots, x_n).
 - Calcular la **Matriz Recíproca** $M=[a_{hi}]$, matriz cuadrada $n \times n$:
 - a) Diagonal Ppal. es siempre 1.
 - b) Propiedad de Reciprocidad:

$$a_{hi} a_{ih} = 1$$
 - c) Propiedad Transitiva:

$$a_{hi} a_{ik} = a_{hk}$$
 - El proceso es el inverso:
 - Se calcula la matriz M .
 - Se calcula A a partir de M .
 - Para calcular M , se cuantifica numéricamente el nivel de prioridad o mayor pertenencia de una pareja de valores: x_i con respecto a x_j .
 - Número de comparaciones: $n(n-1)/2$;
 - La transitividad es difícil de conseguir (el autovalor más grande de la matriz sirve para medir la consistencia de los datos: Si es muy bajo, deberían repetirse los experimentos).

20

Cálculo de la Función de Pertenencia

- **4. Método basado en la Especificación del Problema:**
 - Requieren una función numérica que quiera ser aproximada.
 - El error se define como un conjunto difuso: Mide la calidad de la aproximación.
- **5. Método basado en la Optimización de Parámetros:**
 - La forma de un conjunto difuso A , depende de unos parámetros, denotados por el vector \mathbf{p} : Representado por $A(\mathbf{x}; \mathbf{p})$.
 - Obtenemos algunos resultados experimentales, en la forma de parejas (elemento, Grado de pertenencia): $(\mathbf{E}_k, \mathbf{G}_k)$ con $k=1, 2, \dots, N$.
 - El problema consiste en optimizar el vector \mathbf{p} , $\min_{\mathbf{p}} \sum_{k=1}^N [\mathbf{G}_k - A(\mathbf{E}_k; \mathbf{p})]^2$ por ejemplo minimizando el error cuadrático:
- **6. Método basado en la Agrupación Difusa (Fuzzy Clustering):**
 - Se trata de agrupar los objetos del Universo en grupos (solapados) cuyos niveles de pertenencia a cada grupo son vistos como grados difusos.
 - Existen varios algoritmos de Fuzzy Clustering, pero el más aceptado es el algoritmo de "fuzzy isodata" (Bezdek, 1981).

21

Agrupamiento Difuso: Algoritmo de Bezdek

- **Algoritmo "Fuzzy Isodata" (Bezdek, 1981): Agrupar en c Grupos.**
 - Supongamos N elementos (x_1, x_2, \dots, x_N) , entre los que existe una medida de **distancia** entre cada dos elementos: $\|x_i - x_j\|$.
 - Crear una matriz $\mathbf{F}=[f_{ij}]$, de c filas y N columnas, donde $f_{ij} \in [0,1]$, denota el grado de pertenencia de x_j al grupo i -ésimo y se **cumple** que: " $j = 1, 2, \dots, N: \sum_{i=1}^c f_{ij} = 1$, y que " $i = 1, 2, \dots, c: \sum_{j=1}^N f_{ij} \in (0, N)$.
 - Fila i : Grados de pertenencia de los N elementos al grupo i -ésimo.
 - **Algoritmo:**
 - **1. $k:=0$** ; Hallar una matriz inicial $\mathbf{F}(0)$.
 - **2.** Usando $\mathbf{F}(k)$, calcular los centroides $v_i(k)$:
$$v_i(k) = \frac{\sum_{j=1}^N f_{ij}^2(k) x_j}{\sum_{j=1}^N f_{ij}^2(k)}$$
 - **3. Calcular $\mathbf{F}(k+1)$:**
$$(f_{ij}(k+1))^{-1} = \frac{\sum_{h=1}^c \frac{\|x_j - v_h\|^2}{\|x_j - v_i\|^2}}{\sum_{h=1}^c \frac{\|x_j - v_h\|^2}{\|x_j - v_i\|^2}}$$
 - **4. Comparar $\mathbf{F}(k)$ con $\mathbf{F}(k+1)$:** Si son suficientemente parecidos, **PARAR**. En otro caso, $k:=k+1$; Ir al paso 2.
 - Obtenemos soluciones locales a la siguiente optimización no lineal, **cumpliendo** la matriz $[f_{ij}]$ las condiciones anteriores:
$$\min_{v_i, f_{ij}} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^c f_{ij}^2 \|x_j - v_i\|^2$$

22

Extensiones de los Conjs. Difusos

- Hay muchas formas de extender el concepto de C.D.:

- **1. Conjuntos Difusos Evaluados en Intervalo**

A^\wedge : Si resulta difícil definir una determinada función de pertenencia, podemos definir dos:

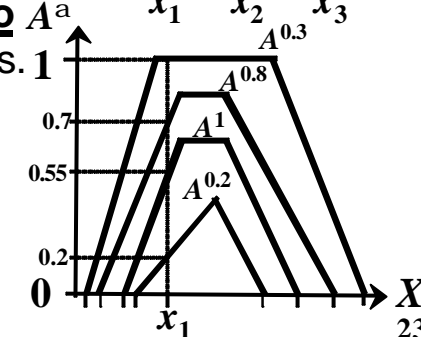
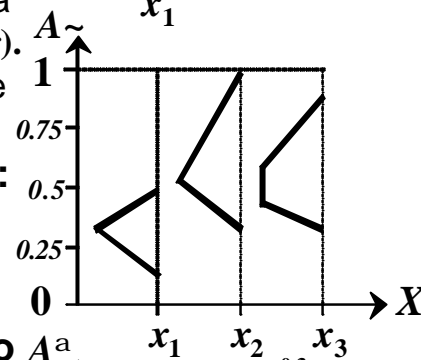
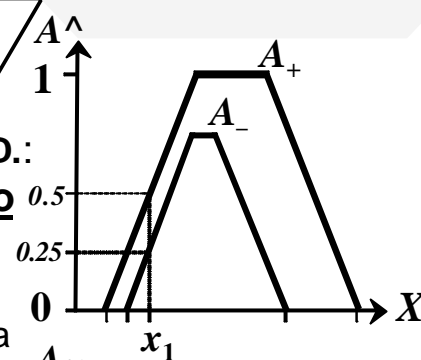
- $A^\wedge = (A_-, A_+)$ siendo las funciones de pertenencia inferior y superior respectivamente: $A_-(x) \leq A_+(x)$.
- Así, cada valor x_i tiene dos valores entre los que se encuentra su grado de pertenencia.

- **2. Conjuntos Difusos de Segundo Orden** A^\sim :

- Los grados de pertenencia son, a su vez conjuntos difusos en el intervalo unidad.
- Sólo es posible en universos finitos.

- **3. Conjuntos Difusos Evaluados en Intervalo Difuso** A^a : Es una mezcla de los dos anteriores.

- Se eligen unos determinados valores a_k y se crea una función de pertenencia f^k para cada uno de ellos, de forma que $f^k(x_i) = a_k$
- Es factible en universos infinitos.
- **Lectura:** x_1 pertenece al conjunto A con grado **0.8** y la certeza de que eso sea cierto es de **0.7**.



Extensiones de los Cjs. Difusos

- **4. Conjuntos Difusos Tipo-Dos (Type-Two):** Los grados de pertenencia son representados por conjuntos difusos definidos, en general, en el intervalo $[0,1]$:

- En universos finitos es como una colección de conjuntos difusos: Uno para cada elemento.
- **Ejemplo:** Para medir la intensidad del tráfico según distintas categorías de vehículos:
 - **Tráfico** = {medio/motos, ligero/camiones, pesado/coches...} donde medio, ligero, pesado... son conjuntos difusos en el espacio que mide la intensidad del tráfico.
- Es similar a los conjuntos difusos de Segundo Orden.

- **Otras generalizaciones:** Pueden definirse, pero con **precaución**.

- Es posible que el concepto que se desea representar ya se pueda representar de alguna forma más simple ya existente.
- Podrían construirse estructuras que sean imposibles de manejar de forma efectiva.
 - Esto ocurre, por ejemplo con lo que serían los conjuntos difusos de Tercer Orden: $A^{\sim\sim}$.

Bibliografía

(⇒ indica que se trata de un libro general o introductorio)

- J. Bezdek, "Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms". Plenum Press, New York, 1981.
- B. Kosko, "Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence". Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- ⇒ R. Kruse, J. Gebhardt, F. Klawonn, "Foundations of Fuzzy Systems". John Wiley & Sons, 1994. ISBN 0-471-94243X.
- ⇒ F.M. McNeill, E. Thro, "Fuzzy Logic: A Practical Approach". AP professional, 1994. ISBN 0-12-485965-8.
- ⇒ J. Mohammd, N. Vadiie, T.J. Ross, Eds. "Fuzzy Logic and Control. Software and Hardware Applications". Englewood Cliffs, NJ: PTR. Prentice Hall, 1993.
- ⇒ W. Pedrycz, F. Gomide, "An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design". A Bradford Book. The MIT Press, Massachusetts, 1998. ISBN 0-262-16171-0.
- T.L. Saaty, "The Analytic Hierarchy Processes". McGraw Hill, New York, 1980.
- ⇒ Sur A&C, Omron Electronics, S.A., "Lógica Fuzzy para Principiantes". Ed. I. Hernández, 1997. ISBN 84-920326-3-4.
- R. Sambuc, "Fonctions d'F-flous: Application a l'aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne". Ph. D. Thesis, Université de Marseille, 1975.
- L.A. Zadeh, "Fuzzy Sets". Information and Control, 8, pp. 338-353, 1965.
- ⇒ H. Zimmermann, "Fuzzy Set Theory and Its Applications". 2d ed. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993.