

### TEORÍA (4 puntos)

1. En el formato de números flotantes IEEE-754 de doble precisión, ¿cuál es el épsilon de la máquina? ¿Cuál es el error de redondeo máximo cometido al normalizar un número real? ¿Y el error de truncado? (0.5)
2. ¿Cuál es el intervalo y cuál es la función peso de los polinomios ortogonales de Chebyshev? Determina por ortogonalización de Gram-Schmidt los dos primeros polinomios ortonormales de Chebyshev. (0.5)
3. Sea  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  una matriz de números complejos general. Considere la matriz  $B = A A^*$  y el sistema lineal  $B y = b$ . ¿Converge Gauss-Seidel para la matriz  $B$ ? ¿Converge el método de Gauss-Jacobi? Si la matriz  $A$  es simétrica, ¿converge Gauss-Seidel para la matriz  $B$ ? ¿Y Gauss-Jacobi? Si la matriz  $A$  es diagonalmente dominante, ¿converge Gauss-Seidel para  $B$ ? ¿Y Gauss-Jacobi? (1)
4. Sea  $A$  una matriz tridiagonal a bloques (cajas) de  $N \times N$  bloques de  $M \times M$  cada uno, que a su vez también son tridiagonales. ¿Cuál es la complejidad algorítmica (número de operaciones) del algoritmo de factorización LU? ¿Cuál es la complejidad de la resolución del sistema lineal  $A x = b$  mediante factorización LU, sin tener en cuenta el coste de ésta, es decir, supuesta ya calculada previamente? Si  $A$  es simétrica, ¿cuál es la complejidad del algoritmo de factorización de Cholesky? Conteste razonadamente. (1)
5. Describe brevemente el método del gradiente conjugado aplicado a una matriz  $A$  hermética y definida positiva. (0.5)
6. Escribe el término del error del polinomio de interpolación escrito en forma de Newton (con diferencias divididas). ¿Qué relación tiene dicho término de error con la expresión obtenida para el polinomio de Lagrange? (0.5)

### PROBLEMAS (6 puntos)

1. ¿Qué es un análisis de propagación de errores hacia atrás? Suponga la siguiente combinación lineal, que surge en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales,

$$y(x) = \sum_{i=1}^N A_i e^{b_i x}, \quad A_i, b_i, x \in \mathbb{R}.$$

¿Cuáles son los errores absolutos y relativos en los datos de esta expresión ( $x$ ,  $A_i$  y  $b_i$ )? Suponga que todos estos errores están acotados por el épsilon de la máquina  $\varepsilon$ . Realice un análisis de propagación de errores hacia atrás de dicha combinación lineal y determine los errores absolutos y relativos en el resultado. Comente el resultado que ha obtenido. Si los  $A_i$  y los  $b_i$  están ordenados en módulo, es decir, si  $|A_i| < |A_{i+1}|$  y  $|b_i| < |b_{i+1}|$ , ¿qué términos introducen más errores, los primeros o los últimos? Conviene, a la hora de obtener menor error total, ordenar las  $A$  y las  $b$ , ¿cuál es la mejor ordenación posible? NOTA: considere separadamente las  $b$  y las  $A$ , y luego los efectos conjuntos, ello le facilitará la presentación de conclusiones. (2 puntos)

2. Suponga que ha calculado la factorización  $LU$  de una matriz  $A$ . Es decir, suponga conocidos los valores  $(a_{ij})$ ,  $(l_{ij})$  y  $(u_{ij})$ , con  $a_{ij} = \sum_k l_{ik} u_{kj}$ . Describa en detalle, un algoritmo (método directo) para el cálculo de la inversa de  $A$ , es decir, los elementos  $(a_{ij}^{-1})$  tales que  $\delta_{ij} = \sum_k a_{ik} a_{kj}^{-1} = \sum_k a_{ik}^{-1} a_{kj}$ . NOTA: describa el algoritmo en pseudo-código; detalle los nombres de las variables que necesita; preste especial atención a los bucles `for`, indicando claramente sus límites, y a los procesos iterativos `while`, indicando claramente sus condiciones de parada. (1 punto)
3. Cómo utilizaría la técnica de corrección residual para mejorar el cálculo de la inversa que ha presentado en el apartado anterior. NOTA: se le pide un algoritmo iterativo que corrija el resultado de un algoritmo directo y que esté basado en el cálculo del residuo de la solución del método directo. (1 punto)
4. Describa el algoritmo de Bairstow para calcular las raíces de un polinomio de coeficientes complejos

$$p(x) = \sum_{j=0}^p a_j z^j, \quad a_i, z \in \mathbb{C}.$$

¿Cuál es el polinomio de segundo orden por el que se divide  $p(x)$ ? ¿Cuál es el resto de dicha división? ¿Dónde utiliza el método de Bairstow el algoritmo de Newton? Detalle el jacobiano que se requiere en la aplicación del método de Newton. Finalmente, describa el algoritmo de Bairstow de la manera más clara posible. (2 puntos)