

Aritmética flotante y propagación de errores.

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8, \\ 2x + 6,00001y &= 8,00001. \end{aligned}$$

Resuélvalo con (1) la regla de Cramer y 6 cifras significativas (es decir 0.*****), y (2) la regla de Cramer y 4 cifras significativas. Explique sus resultados. ¿Es un problema bien condicionado? Justifique su respuesta.

2. Considere la transformación discreta

$$x_{i+1} = a x_i + b.$$

El "punto fijo" x_F de esta transformación es tal que $x_F = x_{i+1} = x_i$, es decir, $x_F = a x_F + b$, y por lo tanto,

$$x_F = \frac{b}{1-a}.$$

Determine los valores de a para los cuales esta transformación (1) converge al punto fijo, y (2) diverge (o no converge) al punto fijo, cuando $i \rightarrow \infty$. Justifique y dé una interpretación geométrica de sus resultados.

3. Haga una análisis de los errores del producto de n números y calcule su error relativo. ¿Cuál es la relación (si es que la hay) entre el error relativo del producto y los errores de redondeo de los valores x_i ? ¿Por qué?
4. Calcule $f(x) = 1 - \cos x$, con aritmética flotante de seis dígitos para $x = 0,000010$. Explique su resultado. ¿Puede obtener un valor más exacto? ¿Cómo? ¿Por qué?
5. Estime el número de condición de $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ para $x = 10^4$. Calcule $f(12345)$ con aritmética de seis dígitos. Explique sus resultados. ¿Puede obtener un valor más exacto? ¿Cómo? ¿Por qué?

6. Estime el error en la evaluación de

$$f(x) = \cos x \cdot \exp 10 x^2,$$

para $x = 2$, si el error absoluto en x es 10^{-6} .

7. Utilice una mantisa de cuatro cifras decimales para calcular las raíces de

$$x^2 + 0,4002 \times 10^0 x + 0,8 \times 10^{-4} = 0.$$

Explique sus resultados. ¿Puede mejorar estas raíces? ¿Cómo? ¿Por qué?

8. Calcular los números de condición asociados a las siguientes operaciones: $x/y, x - y, \sqrt{x}, e^x$. Determinar los errores relativos.

9. **Examen 21/Marzo/1996.** Estudie la estabilidad de Hadamard de los siguientes problemas y determine cuando están bien condicionados:

- a) La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0, \quad y(0) = a, \quad \frac{dy}{dx}(0) = b.$$

- b) La ecuación algebraica no lineal $f(x) = x^2 - 1 = 0$.

- c) La ecuación algebraica lineal

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ 0,99999x + y &= 1. \end{aligned}$$

10. Encuentre la expresión binaria de los números $1/10$ y $5 + 1/3$ y escriba cómo se representan estos números en binario mediante el formato IEEE-754 de doble precisión.