

Métodos Directos para Problemas Algebraicos Lineales.

1. Demuestre que si A es una matriz $n \times n$ no singular y admite dos descomposiciones LU: $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ entonces existe una matriz diagonal tal que $L_2 = L_1 D$ y $U_2 = D^{-1} U_1$.
2. Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Doolittle y pivoteo parcial:

$$\begin{array}{rcl} 2y & +z & = 3 \\ x & -z & = 2 \\ x & -3y & = 0 \end{array}$$

3. Calcular el número de condición relativo a la norma $\|\cdot\|_1$ con aritmética de 3 y 4 cifras y redondeo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1,003 & 58,09 \\ 5,55 & 321,8 \end{pmatrix}$$

4. Sea $w \in \mathbb{C}^n$ (vector columna) con $\|w\|_2 = 1$ y defina la matriz

$$A = I - 2w w^*.$$

- a) ¿ A es simétrica?, ¿es hermítica?
- b) ¿Qué puedes decir de sus autovalores? Demuéstrelo.
- c) ¿Qué puedes decir sobre su forma normal de Schur?
- d) ¿Se podría aplicar el método de Cholesky para factorizar la matriz A ?, ¿por qué?
5. Para resolver el problema de condiciones de contorno

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad y(x_l) = y_l, \quad y(x_r) = y_r,$$

donde a, b, y_l e y_r son constantes, se pueden usar diferencias finitas de la siguiente forma. Se define una malla $\{x_i\}$,

$$x_i = x_0 + hi, \quad h = \frac{x_r - x_l}{n}, \quad x_r = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_l,$$

se aproxima $y(x_i) \approx y_i$ y se aproximan las derivadas

$$y'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2h} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

dando lugar a la ecuación en diferencias

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + b y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Escribe dicha ecuación como un sistema lineal $Ax = b$ (determina a_{ij} , x_i y b_i). ¿ A es simétrica?, ¿es definida positiva? ¿Es la inversa de A una matriz tridiagonal? Realiza la factorización de Crout de dicha matriz (para n general).

6. Escribe el algoritmo de eliminación de Gauss para resolver un sistema tridiagonal:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 &+ b_1 x_2 &= d_1 \\ c_2 x_1 &+ a_2 x_2 &+ b_2 x_3 &= d_2 \\ c_3 x_2 &+ a_3 x_3 &+ b_3 x_4 &= d_3 \\ &\ddots \\ c_n x_{n-1} &+ a_n x_n &= d_n \end{aligned}$$

Este algoritmo se conoce como método de Thomas para sistemas tridiagonales.

7. **Examen 17/Abril/1993.** Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 0,7290 x + 0,8100 y + 0,9000 z &= 0,6867, \\ x + y + z &= 0,8338, \\ 1,331 x + 1,21 y + 1,1 z &= 1, \end{aligned}$$

calcular con aritmética de punto flotante y mantisa de cuatro dígitos la solución por medio de los siguientes métodos

- a) Gauss sin pivotaje.
- b) Gauss con pivotaje por filas.

- c) ¿Hay alguna diferencia entre los dos resultados anteriores? ¿Por qué?
- d) Factorización de Cholesky.
- e) Factorización de Doolittle con el sistema tal como está.
- f) Compare los resultados que ha obtenido en los apartados anteriores y justifique el resultado obtenido mediante el método de Doolittle.
- g) En función de los resultados previamente obtenidos, sugieran y obtengan una buena aproximación LU.

Nota: puesto que todos los números son cercanos a la unidad, no realicen equilibrado o escalado.

8. **Examen 19/Septiembre/1993.** En algunos problemas de estructuras que admiten principios variacionales se encuentran problemas de álgebra lineal de la forma

$$Ax = b, \quad A = LL^\top,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y L es una matriz triangular inferior real y no singular ($\exists L^{-1}$).

- a) Deduzca al menos tres propiedades de la matriz A
 - b) Establezca condiciones para la existencia y unicidad de la solución, asimismo la relación que existe entre la solución y la matriz L .
 - c) ¿Qué propiedades tienen los autovalores de A ?
 - d) Establezca y justifique todos los métodos que conozca para la resolución de $Ax = b$.
9. **Examen 17/Septiembre/1994.** Dada la matriz cuadrada A de orden $n \times n$ y su factorización LU, es decir, $A = LU$ con $l_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$, demuestre que $U = DM$, donde D es una matriz diagonal y $m_{ii} = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Si A es real y simétrica, ¿cuál es la relación entre L y M ? Si es real y simétrica, ¿cuáles son las condiciones que debe satisfacer la matriz D para que la matriz A sea definida positiva? (Estas condiciones deben ser necesarias y suficientes).

10. Resolver el siguiente sistema con aritmética de 4 cifras y redondeo utilizando todos los métodos directos que conozca, con y sin pivoteo, con y sin escalado:

$$\begin{aligned}1,012x_1 - 2,132x_2 + 3,104x_3 &= 1,984, \\-2,132x_1 + 4,096x_2 - 7,013x_3 &= -5,049, \\3,104x_1 - 7,013x_2 + 0,014x_3 &= -3,895.\end{aligned}$$

11. Probar las siguientes afirmaciones o dar contraejemplos para mostrar que no son ciertas en su caso:

- a) El producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica
- b) Si A es diagonalmente dominante de forma estricta también lo es $-A$
- c) Si A es definida positiva, $-A$ también lo es.

12. Resuelva el sistema

$$3,9x_1 + 1,6x_2 = 5,5, \quad 6,8x_1 + 2,9x_2 = 9,7,$$

con aritmética de dos cifras y el método de Crout. Si es posible mejore el resultado utilizando corrección residual.