

Ejercicios de aproximación de funciones e interpolación.

1. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 2 tal que

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0) = y'_0, \quad p'(x_1) = y'_1.$$

2. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 4 tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad p'(x_0) = y'_0, \quad p'(x_2) = y'_2,$$

donde $x_i = x_0 + i h$ e y_i, y'_0, y'_2 son dadas.

3. Sea $p_2(x)$ un polinomio cuadrático que interpola la función $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$; ¿cuál es el error de $f'(x_i) - p'_2(x_i)$, $i = 0, 1, 2$? Suponga que $f \in C^3[x_0, x_2]$ y calcule cotas para estos errores.
4. Calcule una cota inferior del error de interpolación $|f(x) - p_n(x)|$ para $f(x) = \ln x$, $n = 3$ en el punto $x = 3/2$, si $p(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos $x_0 = 1, x_1 = 4/3, x_2 = 5/3$ y $x_3 = 2$.
5. Sea la tabla de valores

x	3,0	4,5	7,0	9,0
$f(x)$	2,5	1,0	2,5	0,5

Interpole dicha tabla de valores con (1) polinomios lineales a trozos (explicado en clase), (2) splines cuadráticas (con derivada continua, y no explicadas en clase, pero fáciles de derivar), y (2) con splines cúbicas (explicadas en clase). Compare el valor en $x = 5$ con los tres métodos.

6. Aproxime la función e^x
 - a) linealmente por $y = ax + b$, cerca de $x = 0$;
 - b) racionalmente por $y = \frac{ax+b}{x+c}$, cerca de $x = 0$.

7. Algunos métodos de aproximación para una función $f(x)$ se basan en la definición de un funcional

$$F(f) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{m_j} w_{ij} \frac{d^j f}{dx^j}(x_{ij}) + E(f),$$

tal que $E(f) = 0$ cuando f es un polinomio de grado

$$N = \sum_{j=0}^n m_j - 1,$$

donde w_{ij} son pesos. Como un polinomio no es más que una combinación lineal de monomios x^k , tenemos que basta probar que

$$E(x^k) = 0, \quad F(x^k) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{m_j} w_{ij} \frac{d^j x^k}{dx^j}(x_{ij}),$$

para $k \leq N$. Dados $f(a), f(b), f'(a)$ y $f'(b)$, desarrolle un método como el indicado más arriba y aproxime o calcule los valores aproximados de

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \int_a^b f(x) dx.$$

8. Una función $f(x)$ se pretende aproximar racionalmente por

$$R_{mn}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

donde

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad Q_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i,$$

tal que

$$R_{mn}(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

- a) ¿Cuál es la relación entre m, n y s ?
- b) Para $x_j = 0, 1, 2; f(x_j) = 1, 3, 3, m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$?
- c) Para $x_j = 0, 2, 3; f(x_j) = -1, 1, 1/2, m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$? Indique algunas propiedades relativas a la continuidad $R_{mn}(x)$.

9. Considere la función racional

$$p(x) = \frac{a + b x}{1 + c x},$$

que satisface $p(x_i) = y_i$, para $i = 1, 2, 3$, donde $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. ¿Existe tal función $p(x)$?

10. Dados los valores $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, el polinomio interpolador puede usarse para determinar los ceros de la función $f(x) = 0$. Por ejemplo, los métodos de regula falsi y de Müller se basan en este procedimiento. Utilice la interpolación para determinar la función inversa $x(f)$ y los ceros de la función f . Determine los errores de interpolación que comete.
11. Calcule los tres primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.
12. Calcule los tres primeros polinomios de Legendre para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.
13. Calcule los tres primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y ortonormalícelos.
14. Calcule los tres primeros polinomios de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$ y normalícelos de tal forma que su valor en $x = 1$ sea $+1$.
15. Calcule el polinomio de grado ≤ 3 tal que minimiza

$$\int_{-1}^1 (e^x - p(x))^2 dx.$$

16. Dada una función $f(x)$ de la que sólo se conocen sus valores $f(x_n)$ donde

$$x_n = 10 + \frac{n - 1}{5}, \quad n = 1, 2, \dots, 6.$$

Determine una parábola que aproxime esta función mínimo-cuadráticamente.

17. Haga el ejercicio anterior pero usando polinomios ortogonales con respecto a una función peso $r(x) = w(x) = 1$. ¿Cuál es la diferencia más significativa entre las soluciones de los dos ejercicios?