Cuarta relación de problemas — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 12 de Noviembre de 2002

Métodos Directos para Problemas Algebraicos Lineales.

1. Demuestre que si A es una matriz nxn no singular y admite dos descomposiciones LU: $A = L_1U_1 = L_2U_2$ entonces existe una matriz diagonal tal que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

2. Resuelva el siguiente sistema mediante el método de Doolittle y pivoteo parcial:
$$\begin{array}{rrrl} & 2y & +z & = 3 \\ x & & -z & = 2 \\ x & -3y & & = 0 \end{array}$$

3. Calcular el número de condición relativo a la norma $\|\cdot\|_1$ con aritmética de 3 y 4 cifras y redondeo de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1{,}003 & 58{,}09 \\ 5{,}55 & 321{,}8 \end{pmatrix}$$

4. Sea $w \in \mathbb{C}^n$ (vector columna) con $\|w\|_2 = 1$ y defina la matriz
$$A = I - 2\,w\,w^*.$$
   a) ¿A es simétrica?, ¿es hermítica?
   b) ¿Qué puedes decir de sus autovalores? Demuéstrelo.
   c) ¿Qué puedes decir sobre su forma normal de Schur?
   d) ¿Se podría aplicar el método de Cholesky para factorizar la matriz A?, ¿por qué?

5. Para resolver el problema de condiciones de contorno
$$y'' + ay' + by = f(x), \qquad y(x_l) = y_l, \quad y(x_r) = y_r,$$
donde a, b, y_l e y_r son constantes, se pueden usar diferencias finitas de la siguiente forma. Se define una malla $\{x_i\}$,
$$x_i = x_0 + hi, \qquad h = \frac{x_r - x_l}{n}, \qquad x_r = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_l,$$

se aproxima $y(x_i) \approx y_i$ y se aproximan las derivadas

$$y'(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y''(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x_i+h) - 2y(x_i) + y(x_i-h)}{h^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

dando lugar a la ecuación en diferencias

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + b\,y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Escribe dicha ecuación como un sistema lineal $Ax = b$ (determina a_{ij}, x_i y b_i). ¿A es simétrica?, ¿es definida positiva? ¿Es la inversa de A una matriz tridiagonal? Realiza la factorización de Crout de dicha matriz (para n general).

6. Escribe el algoritmo de eliminación de Gauss para resolver un sistema tridiagonal:

$$\begin{array}{lllllr} a_1x_1 & +b_1x_2 & & & & = d_1 \\ c_2x_1 & +a_2x_2 & +b_2x_3 & & & = d_2 \\ & c_3x_2 & +a_3x_3 & +b_3x_4 & & = d_3 \\ & & & \ddots & & \\ & & & c_nx_{n-1} & +a_nx_n & = d_n \end{array}$$

Este algoritmo se conoce como método de Thomas para sistemas tridiagonales.

7. **Examen 17/Abril/1993**. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 0{,}7290\,x + 0{,}8100\,y + 0{,}9000\,z &= 0{,}6867, \\ x + y + z &= 0{,}8338, \\ 1{,}331\,x + 1{,}21\,y + 1{,}1\,z &= 1, \end{aligned}$$

calcular con aritmética de punto flotante y mantisa de cuatro dígitos la solución por medio de los siguientes métodos

a) Gauss sin pivotaje.

b) Gauss con pivotaje por filas.

c) ¿Hay alguna diferencia entre los dos resultados anteriores? ¿Por qué?

d) Factorización de Cholesky.

e) Factorización de Doolittle con el sistema tal como está.

f) Compare los resultados que ha obtenido en los apartados anteriores y justifique el resultado obtenido mediante el método de Doolittle.

g) En función de los resultados previamente obtenidos, sugieran y obtengan una buena aproximación LU.

Nota: puesto que todos los números son cercanos a la unidad, no realicen equilibrado o escalado.

8. **Examen 19/Septiembre/1993**. En algunos problemas de estructuras que admiten principios variacionales se encuentran problemas de álgebra lineal de la forma

$$A\,x = b, \qquad A = L\,L^\top,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y L es una matriz triangular inferior real y no singular ($\exists L^{-1}$).

a) Deduzca al menos tres propiedades de la matriz A

b) Establezca condiciones para la existencia y unicidad de la solución, asimismo la relación que existe entre la solución y la matriz L.

c) ¿Qué propiedades tienen los autovalores de A?

d) Establezca y justifique todos los métodos que conozca para la resolución de $A\,x = b$.

9. **Examen 17/Septiembre/1994**. Dada la matriz cuadrada A de orden $n \times n$ y su factorización LU, es decir, $A = L\,U$ con $l_{ii} = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, demuestre que $U = D\,M$, donde D es una matriz diagonal y $m_{ii} = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Si A es real y simétrica, ¿cuál es la relación entre L y M? Si es real y simétrica, ¿cuáles son las condiciones que debe satisfacer la matriz D para que la matriz A sea definida positiva? (Estas condiciones deben ser necesarias y suficientes).

10. Resolver el siguiente sistema con aritmética de 4 cifras y redondeo utilizando todos los métodos directos que conozca, con y sin pivoteo, con y sin escalado:

$$\begin{aligned} 1{,}012\,x_1 - 2{,}132\,x_2 + 3{,}104\,x_3 &= 1{,}984, \\ -2{,}132\,x_1 + 4{,}096\,x_2 - 7{,}013\,x_3 &= -5{,}049, \\ 3{,}104\,x_1 - 7{,}013\,x_2 0{,}014\,x_3 &= -3{,}895. \end{aligned}$$

11. Probar las siguientes afirmaciones o dar contraejemplos para mostrar que no son ciertas en su caso:

    a) El producto de dos matrices simétricas es una matriz simétrica

    b) Si A es diagonalmente dominante de forma estricta también lo es $-A$

    c) Si A es definida positiva, $-A$ también lo es.

12. Resuelva el sistema

$$3{,}9\,x_1 + 1{,}6\,x_2 = 5{,}5, \qquad 6{,}8\,x_1 + 2{,}9\,x_2 = 9{,}7,$$

con aritmética de dos cifras y el método de Crout. Si es posible mejore el resultado utilizando corrección residual.