

Ejercicios de interpolación de funciones (primera parte del tema 7).

1. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 2 tal que

$$p(x_0) = y_0, \quad p'(x_0) = y'_0, \quad p'(x_1) = y'_1.$$

2. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 4 tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad p'(x_0) = y'_0, \quad p'(x_2) = y'_2,$$

donde $x_i = x_0 + i h$ e y_i, y'_0, y'_2 son dadas.

3. Sea $p_2(x)$ un polinomio cuadrático que interpola la función $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$; ¿cuál es el error de $f'(x_i) - p'_2(x_i)$, $i = 0, 1, 2$? Suponga que $f \in C^3[x_0, x_2]$ y calcule cotas para estos errores.
4. Calcule una cota inferior del error de interpolación $|f(x) - p_n(x)|$ para $f(x) = \ln x$, $n = 3$ en el punto $x = 3/2$, si $p(x)$ interpola a $f(x)$ en los puntos $x_0 = 1, x_1 = 4/3, x_2 = 5/3$ y $x_3 = 2$.
5. Sea la tabla de valores

x	3,0	4,5	7,0	9,0
$f(x)$	2,5	1,0	2,5	0,5

Interpole dicha tabla de valores con (1) polinomios lineales a trozos (explicado en clase), (2) splines cuadráticas (con derivada continua, y no explicadas en clase, pero fáciles de derivar), y (2) con splines cúbicas (explicadas en clase). Compare el valor en $x = 5$ con los tres métodos.

6. Considere la función racional

$$p(x) = \frac{a + b x}{1 + c x},$$

que satisface $p(x_i) = y_i$, para $i = 1, 2, 3$, donde $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. ¿Existe tal función $p(x)$? Determínela en su caso

7. Una función $f(x)$ se pretende interpolar racionalmente por

$$R_{mn}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

donde

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad Q_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i,$$

es decir, tal que

$$R_{mn}(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

- a) ¿Cuál es la relación entre m , n y s ?
 - b) Para $x_j = 0, 1, 2$; $f(x_j) = 1, 3, 3$, $m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$?
 - c) Para $x_j = 0, 2, 3$; $f(x_j) = -1, 1, 1/2$, $m = n = 1$, ¿cuál es $R_{mn}(x)$? Indique algunas propiedades relativas a la continuidad $R_{mn}(x)$.
8. Dados los valores $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, el polinomio interpolador puede usarse para determinar los ceros de la función $f(x) = 0$. Por ejemplo, los métodos de regula falsi y de Müller, que estudiaremos en el tema 8, se basan en este procedimiento (la interpolación inversa). Utilice la interpolación para determinar la función inversa $x(f)$ y los ceros de la función f . Determine los errores de interpolación que comete.