

SOLUCIONES

Soluciones de los ejercicios de la tercera relación de problemas.

1. Demuestre que si A y B son matrices reales cuadradas, con $|A| \neq 0$, si

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

entonces existe B^{-1} . Además acote la diferencia

$$\|A^{-1} - B^{-1}\|.$$

Solución. Definamos D de la siguiente forma

$$B = A - (A - B) = A(I - A^{-1}(A - B)) = A(I - D).$$

Por hipótesis sabemos que

$$1 > \|A^{-1}\| \|A - B\| \geq \|A^{-1}(A - B)\| = \|D\|,$$

por lo que $1 > \|D\| \geq \rho(D)$ y por el ejercicio previo, existe $(I - D)^{-1}$, con lo que entonces también existe la inversa

$$B^{-1} = (I - D)^{-1} A^{-1}.$$

Seguidamente acotaremos la norma de la inversa

$$\|B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|(I - D)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A - B)\|}.$$

para finalmente acotar la diferencia entre las dos inversas

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$$

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|B - A\| \|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B - A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|B - A\|}.$$

2. Se define la traza de la matriz cuadrada A como la suma de los elementos de su diagonal $\text{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$. Demuestre que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios. Ayuda: el teorema de Schur le puede ser útil.

Solución. Sabemos que A tiene forma normal de Schur, es decir, que existe una matriz U unitaria tal que

$$T = U^{-1} A U,$$

es una matriz triangular cuya diagonal está formada por los autovalores de A . Además, como

$$(U^{-1} A U)_{ij} = \sum_l \sum_k (u^{-1})_{il} a_{lk} u_{kj},$$

$$(U U^{-1})_{kl} = \sum_i u_{ki} (u^{-1})_{il} = (I)_{kl} = \delta_{kl},$$

y,

$$\text{tr}(U^{-1} A U) = \sum_i \sum_l \sum_k (u^{-1})_{il} a_{lk} u_{ki} = \sum_l \sum_k a_{lk} \delta_{kl} = \sum_k a_{kk} = \text{tr}(A),$$

por lo que

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(T) = \sum_k \lambda_{Ak}.$$

3. Dada una matriz cuadrada A demuestre que

$$|\text{tr}(A)| \leq n \rho(A).$$

Si, además, A es hermitiana (o simétrica) y definida positiva

$$\text{tr}(A) \geq \rho(A).$$

Solución. Aplicando el resultado del ejercicio anterior,

$$|\text{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq n \max_i |\lambda_i| \leq n \rho(A).$$

Por un lado, como A es hermitiana, sus autovalores son reales. Por otro lado, como A es definida positiva, $\forall x \neq 0, \langle x, Ax \rangle > 0$, estos autovalores son positivos, ya que para $Ax = \lambda x, x \neq 0, \langle x, x \rangle > 0$,

$$\langle x, Ax \rangle = \lambda \langle x, x \rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

Finalmente, como una suma de números positivos es siempre mayor que el mayor de los sumandos

$$\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i \geq \max_i \lambda_i = \rho(A).$$

4. Demuestre que para $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que

- a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$,
- b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$,
- c) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_2$.

Es decir, estas tres normas son equivalentes entre sí.

Solución.

a) Como

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \leq n \|x\|_\infty,$$

donde se ha usado que $|x_i|/\|x\|_\infty \leq 1$, tenemos que las normas infinito y uno son equivalentes

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

b) Ya que

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\|x\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^2}{\|x\|_\infty^2}},$$

por lo mismo que antes

$$\sqrt{\|x\|_\infty^2} \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_\infty^2 n},$$

y tenemos que las normas infinito y euclídea son equivalentes

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

c) Dado que

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_\infty \|x\|_1,$$

y aplicando el apartado (a) obtenemos fácilmente

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_\infty \|x\|_1} \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \leq n \|x\|_2.$$

5. Dado el polinomio

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m,$$

y la matriz cuadrada A , defina

$$p(A) = b_0 I + b_1 A + \cdots + b_m A^m.$$

Suponga que la forma canónica de Jordan de A es diagonal, es decir,

$$P^{-1} A P = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dado el polinomio característico de A , $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, demuestre que $p(A) = 0$.

Solución. Sea el polinomio característico de A

$$p(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + \cdots + b_n \lambda^n.$$

Ya que

$$\begin{aligned} I &= P I P^{-1}, & A &= P \Lambda P^{-1}, \\ A^2 &= A A = P \Lambda P^{-1} P \Lambda P^{-1} = P \Lambda P^{-1}, & \dots, \end{aligned}$$

tenemos que

$$p(A) = P (b_0 I + b_1 \Lambda + \cdots + b_n \Lambda^n) P^{-1},$$

y como el término entre paréntesis es nulo porque $p(\lambda_i) = 0$,

$$p(A) = 0.$$

6. Demuestre el teorema de Cayley-Hamilton, que dice que toda matriz A satisface su ecuación característica $p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$, es decir, $p(A) = 0$.

Solución. Sea J la forma canónica de Jordan de A , es decir, existe una matriz P no singular tal que

$$A = P^{-1}JP,$$

siendo J una matriz diagonal por bloques de Jordan,

$$J = \text{diag}[J(\lambda_1, n_1^{(1)}), \dots, J(\lambda_k, n_{m_{gk}}^{(k)})].$$

Entonces, es fácil comprobar que

$$p(A) = P^{-1}p(J)P = P^{-1}\text{diag}[p(J(\lambda_1, n_1^{(1)})), \dots, p(J(\lambda_k, n_{m_{gk}}^{(k)}))]P.$$

Ahora bien, un bloque de Jordan $J(\lambda, n)$ tiene como polinomio característico

$$|J(\lambda, n) - \mu I| = (\mu - \lambda)^n,$$

por lo que por lo que λ tiene multiplicidad algebraica $m_a = n$. Sin embargo, el rango de $J(\lambda, n) - \mu I$ es $n - 1$, por lo que la multiplicidad geométrica de λ es $m_g = n - (n - 1) = 1$, y por lo tanto existe un sólo autovector e_1 como base para el autoespacio de λ ,

$$L(\lambda) = \{x : (J(\lambda, n) - \lambda I)x = 0\} = \{x : x = \alpha e_1, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Sean $\{e_i\}$ con $i = 2, 3, \dots, n$ vectores necesarios para completar e_1 hasta formar una base de \mathbb{C}^n . Podemos construir dichos vectores mediante la iteración

$$(J(\lambda, n) - \lambda I)e_i = e_{i-1}, \quad i = n, n-1, \dots, 2,$$

donde sabemos que $(J(\lambda, n) - \lambda I)e_1 = 0$. Haciendo, formalmente $e_k = 0$ para $k \leq 0$, podemos escribir $\forall i, j \geq 1$,

$$(J(\lambda, n) - \lambda I)^i e_j = e_{j-i},$$

y por tanto

$$(J(\lambda, n) - \lambda I)^n = 0, \quad (J(\lambda, n) - \lambda I)^{n-1} \neq 0.$$

Entonces, aplicando este resultado a los bloques de Jordan de J ,

$$p(J(\lambda_i, n_j^{(i)})) = (J(\lambda_i, n_j^{(i)}) - \lambda I)^{n_{mai}^{(i)}} q(\lambda) = 0,$$

donde sabemos que $m_{ai} \geq m_{gi}$ y $q(\lambda)$ es un polinomio de grado $n - n_{mai}^{(i)}$. Y por tanto, hemos demostrado el teorema de Cayley-Hamilton.

7. Dada una matriz A cuadrada cuyos autovalores son λ_i y sus autovectores u_i , determine los autovalores y los autovectores de

- a) A^m , $m \geq 2$,
- b) A^{-1} , suponiendo que $|A| \neq 0$,
- c) $A + c I$, donde c es una constante.

Solución. Dado que $A u_i = \lambda_i u_i$,

a)

$$A^m u_i = A^{m-1} \lambda_i u_i = A^{m-2} \lambda_i^2 u_i = \dots = \lambda_i^m u_i.$$

b)

$$u_i = A^{-1} A u_i = \lambda_i A^{-1} u_i = \lambda_i \mu_i u_i$$

con lo que

$$A^{-1} u_i = \mu_i u_i = \frac{1}{\lambda_i} u_i,$$

donde $|\lambda_i| \neq 0$ ya que $|A| = \prod_i \lambda_i \neq 0$.

c)

$$(A + c I) u_i = A u_i + c u_i = (\lambda_i + c) u_i.$$

8. Para cualquier matriz A , si U es unitaria y del mismo orden que A , demuestre que

$$\|A U\|_2 = \|U A\|_2 = \|A\|_2.$$

Solución. La definición de norma matricial subordinada es

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A x\|_2}{\|x\|_2}.$$

Si U es unitaria resulta que

$$\|U A x\|_2^2 = \langle U A x, U A x \rangle = \langle A x, U^* U A x \rangle = \|A x\|_2^2$$

y por tanto

$$\|U A\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|U A x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A x\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2.$$

Haciendo $y = U x$, tenemos que

$$\|y\|_2^2 = \|U x\|_2^2 = \langle U x, U x \rangle = \langle x, U^* U x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2,$$

por lo que

$$\|A U\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A U x\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|y\| \neq 0} \frac{\|A y\|_2}{\|y\|_2} = \|A\|_2.$$

9. Sea U una matriz unitaria. Demuestre que

- a) $\|U x\|_2^2 = \|x\|_2^2$, $x \in \mathbb{C}^n$,
- b) la distancia entre x e y es la misma que la distancia entre $U x$ y $U y$,
- c) $\langle U x, U y \rangle = \langle x, y \rangle$, $x, y \in \mathbb{C}^n$,
- d) los autovalores de U tienen módulo unidad, $|\lambda_U| = 1$.

Solución.

a)

$$\|U x\|_2^2 = \langle U x, U x \rangle = \langle x, U^* U x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|_2^2,$$

b) la distancia entre x e y es $\|x - y\|_2$, por lo que

$$\|U x - U y\|_2 = \|U(x - y)\|_2 = \|x - y\|_2,$$

c)

$$\langle U x, U y \rangle = \langle x, U^* U y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

d) Sea $U u_i = \lambda_i u_i$, entonces

$$\langle u_i, u_i \rangle = \langle U u_i, U u_i \rangle = \langle \lambda_i u_i, \lambda_i u_i \rangle = |\lambda_i|^2 \langle u_i, u_i \rangle,$$

con lo que $|\lambda_i| = 1$.

Los autovectores de una matriz unitaria son linealmente independientes y definen una base ortonormal, por lo que todo vector se puede escribir de la forma

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i,$$

y por tanto

$$\langle U x, U x \rangle = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.$$

10. Dada la matriz A hermitiana que es definida positiva, es decir, $\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle A x, x \rangle > 0$. Demuestre que A es definida positiva si y sólo si sus autovalores son reales y positivos.

Solución. Sea $A u_i = \lambda_i u_i$. Sabemos que los autovalores de una matriz hermitiana son números reales. Entonces de la definición de matriz definida positiva aplicada a un autovector

$$\langle A u_i, u_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle > 0$$

obtenemos que el autovalor ha de ser positivo $\lambda_i > 0$, ya que $\langle u_i, u_i \rangle > 0$.

Por otro lado, si A es hermitiana con autovalores reales, entonces sus autovectores definen una base ortonormal y $\forall x$,

$$x = \sum_i \alpha_i u_i,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \langle A x, x \rangle &= \langle A \sum_i \alpha_i u_i, \sum_i \alpha_i u_i \rangle = \langle \sum_i \lambda_i \alpha_i u_i, \sum_i \alpha_i u_i \rangle \\ &= \sum_i \sum_j \langle \lambda_i \alpha_i u_i, \alpha_j u_j \rangle = \sum_i \sum_j \lambda_i \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i |\alpha_i|^2 > 0 \end{aligned}$$

por ser una suma de números positivos. Luego A es definida positiva.

11. Defina

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Demuestre que los autovalores de e^A son e^{λ_i} donde λ_i son los autovalores de A . Además demuestre que si B es semejante a A , $P^{-1} B P = A$, entonces $e^A = P^{-1} e^B P$.

Solución. Sea $A u_i = \lambda_i u_i$. Como $A^m u_i = \lambda_i^m u_i$, entonces

$$e^A u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^m}{m!} u_i = e^{\lambda_i} u_i.$$

Por otro lado, $A = P^{-1} B P$ implica que

$$A^m = (P^{-1} B P)^m = P^{-1} B^m P,$$

entonces

$$\begin{aligned} e^A &= e^{P^{-1} B P} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1} B P)^m}{m!} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1} B^m P)}{m!} \\ &= P^{-1} \left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) P = P^{-1} e^B P. \end{aligned}$$

12. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Calcule los autovalores y autovectores/autofunciones de esta ecuación. ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Discreticemos el espacio x de tal manera que haya $(N + 1)$ puntos espaciados en $1/N$; es decir, llamando $\Delta x = 1/N$,

$$x_i = \frac{i-1}{N} = (i-1) \Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, N+1.$$

Aproximemos la segunda derivada por la fórmula en diferencias

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta^4),$$

donde $x_i = i \Delta x$ y $y_i \approx y(x_i)$ y de tal manera que la ecuación de partida evaluada en el punto x_i venga dada por

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} + \lambda y_i = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$y_{i+1} + (w - 2)y_i + y_{i-1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N,$$

donde $w = \lambda \Delta x^2$, y $y_1 = y_{N+1} = 0$. Definiendo $\Lambda = w - 2$, tenemos

$$y_{i+1} + \Lambda y_i + y_{i-1} = 0, \quad y_1 = y_{N+1} = 0.$$

¿Cuáles son los autovalores Λ de esta sistema de ecuaciones? ¿Cuántos hay? ¿Por qué? Para los casos $N = 2$ y $N = 3$ calcule los autovalores Λ y relacionelos con los λ de la ecuación diferencial ordinaria. ¿Cuál es esa relación? ¿Por qué? ¿Qué es lo que se ha perdido/ganado en la discretización?

Solución. La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

se puede interpretar como un problema de autovalores haciendo la analogía

$$A y + \lambda y = 0, \quad \mathcal{A}(D) y + \lambda y = 0,$$

con $\mathcal{A}(D) = D^2$. Para $\mathbb{R} \ni \lambda > 0$ la solución de esta ecuación diferencial toma la forma

$$y(x) = A \sin(k x) + B \cos(k x),$$

y como

$$y'' = -A k^2 \sin(k x) - B k^2 \cos(k x) = -k^2 y(x),$$

entonces $k^2 = \lambda$, y aplicando las condiciones de contorno

$$y(0) = B = 0, \quad y(1) = A \sin(k) = 0,$$

$$k \equiv k_n = \pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

con lo que las autofunciones serán no nulas para los autovalores del espectro discreto $\lambda_n = \pi^2 n^2$, e iguales a

$$y_n(x) = A \sin(\pi n x), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por otro lado, para $\mathbb{R} \ni \lambda < 0$ la solución de la ecuación diferencial toma la forma

$$y(x) = A e^{kx} + B e^{-kx},$$

con $k = \sqrt{-\lambda}$, y aplicando las condiciones de contorno

$$y(0) = A + B = 0, \quad y(1) = A e^k + B e^{-k} = 0,$$

obtenemos $A = B = 0$ e $y(x) \equiv 0$. Luego no hay espectro continuo.

Hemos encontrado que el espectro de esta ecuación diferencial se reduce a su espectro discreto y que existe un número infinito (numerable) de autovalores λ_n .

La ecuación en diferencias finitas

$$y_{i+1} + \Lambda y_i + y_{i-1} = 0, \quad y_1 = y_{N+1} = 0.$$

se puede interpretar como un problema de autovalores haciendo la analogía

$$\mathcal{A}(E) y + \Lambda y = 0, \quad \mathcal{A}(E) = E + E^{-1},$$

donde $E y_i = y_{i+1}$ y $E^{-1} y_i = y_{i-1}$. Para determinar los autovalores habrá que determinar la solución que cumple con las condiciones de contorno. La solución de esta ecuación en diferencias se puede escribir como

$$y_i = A \xi_+^i + B \xi_-^i = A \cos(i-1) \xi + B \sin(i-1) \xi,$$

que aplicando las condiciones de contorno

$$y_1 = A = 0, \quad y_{N+1} = B \sin N \xi = 0,$$

se obtiene la familia de soluciones

$$y_i^{(n)} = B \sin(i-1) \xi_n, \quad \xi_n = \frac{n \pi}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Para determinar los valores de Λ (autovalores) para los que cada función de esta familia es realmente una solución (autofunción) habrá que hacer

$$\sin i \xi + \Lambda \sin(i-1) \xi + \sin(i-2) \xi = 0,$$

Recurriendo a un manual de fórmulas y tablas matemáticas sabemos que

$$\begin{aligned}\sin n A &= \sin A \left((2 \cos A)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2 \cos A)^{n-3} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-3}{2} (2 \cos A)^{n-5} - \dots \right),\end{aligned}$$

(fórmula 5,61 del manual de M.R. Spiegel, Serie Schaum), por lo que

$$\begin{aligned}\sin n A + \sin(n-2) A &= \sin A \left((2 \cos A)^{n-1} - \left(\binom{n-2}{1} - 1 \right) (2 \cos A)^{n-3} \right. \\ &\quad \left. + \left(\binom{n-3}{2} - \binom{n-4}{1} \right) (2 \cos A)^{n-5} - \dots \right),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Lambda \sin(n-1) A &= \Lambda \sin A \left((2 \cos A)^{n-2} - \binom{n-3}{1} (2 \cos A)^{n-4} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-4}{2} (2 \cos A)^{n-6} - \dots \right);\end{aligned}$$

observando que

$$\begin{aligned}\left(\binom{n-2}{1} - 1 \right) &= \binom{n-3}{1}, \\ \left(\binom{n-3}{2} - \binom{n-4}{1} \right) &= \binom{n-4}{2}, \quad \dots,\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\sin n A + \sin(n-2) A + \Lambda \sin(n-1) A = 0, \quad \Lambda = -2 \cos A,$$

y, en nuestro caso, obtenemos como autovalores

$$\Lambda_n = -2 \cos \xi_n, \quad \xi_n = \frac{n\pi}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

Por tanto, hemos obtenido los $N-1$ autovalores de la ecuación en diferencias finitas.

La relación entre los autovalores continuos λ_n y los discretos

$$\Lambda_n = w_n - 2 = \tilde{\lambda}_n \Delta x^2 - 2 = -2 \cos n \pi \Delta x,$$

es (aplicando Taylor para $\Delta x \ll 1$)

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_n &= \frac{1}{\Delta x^2} (2 - 2 \cos n \pi \Delta x) \\ &= n^2 \pi^2 - \frac{n^4 \pi^4}{12} \Delta x^2 + O(\Delta x^4) \\ &= \lambda_n - \frac{\lambda_n^2}{12} \Delta x^2 + O(\lambda_n^3 \Delta x^4),\end{aligned}$$

y los autovalores del problema en diferencias finitas son una aproximación cuadrática para los primeros autovalores del problema continuo.