Quinta relación de problemas — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 16 de Noviembre de 1998

Realizar los siguientes ejercicios relativos al Tema 5 de la asignatura.

1. Para la inversión de una matriz cuadrada A de orden $n \times n$, cuya inversa existe, se ha definido la siguiente iteración

$$B_{i+1} = B_i\,(2\,I - A\,B_i), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

donde I es la matriz identidad (o unidad) de orden $n \times n$, y B_1 es una matriz cualquiera de orden $n \times n$. Defina la matriz $C_i = I - A\,B_i$ y deduzca las propiedades que debe satisfacer dicha matriz para que la iteración anterior converga a la inversa A^{-1}. ¿Cuáles son las desventajas de este método comparado con otros que usted conozca para calcular la inversa de una matriz? Ayuda: Deduzca cotas superiores e inferiores para la norma de la matriz B_{i+1}.

2. ¿Para qué valores de α, la iteración

$$x_{i+1} = \alpha\, x_i + \beta, \qquad \text{con } x_0 = a, \quad \beta \neq 0,$$

converge? Es decir, ¿para qué valores de α,

$$\lim_{i \to \infty} x_i,$$

existe?

3. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resuelva el sistema $A\,x = b$ por el método de Gauss-Jacobi y determine la tasa de convergencia usando las normas ∞ y 1. Haga lo mismo con el método de Gauss-Seidel y deduzca cuál de ellos converge más rápidamente.

4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + a\,y &= 1 \\ x + y + z & \\ b\,y + z &= 1 \end{aligned}$$

a) Determine los valores de a y b para que el sistema tenga solución única

b) Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss-Jacobi para la resolución de dicho sistema

c) Determine los valores de a y b para asegurar la convergencia del método de Gauss-Seidel

d) Estudiar la convergencia de los métodos anteriores y el método de Cholesky para los valores de a y b para los que la matriz de los coeficientes del sistema es simétrica.

5. Sea B una matriz real cuadrada de orden $n \times n$ tal que $B\,x = 0$ y $|B| = 0$.

   a) ¿Cuál es la relación entre b_{ii} y b_{ij}, donde $B = (b_{ij})$?

   b) Si $B = A - \lambda I$ donde λ son los autovalores de A, ¿cuál es la relación entre λ y los coeficientes o elementos de la matriz A?

   c) ¿Cuál es la relación entre $|\lambda|_{\text{máx}}$ y $|\lambda|_{\text{mín}}$ y los elementos de A?

   d) Sea A una matriz cuadrada de orden $n\times n$ tal que $a_{ii} = 1$. Deduzca las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de esta matriz para que el método iterativo de Gauss-Jacobi converja cuando se utiliza para resolver el sistema $A\,x = b$.

6. Comprobar que la matriz que determina el sistema

$$\begin{aligned} 10\,x_1 - x_2 \quad &= 9 \\ -x_1 + 10\,x_2 - 2\,x_3 &= 7 \\ -2\,x_2 + 10\,x_3 &= 6, \end{aligned}$$

   es definida positiva. ¿Qué parámetro de relajación w escogería para obtener una convergencia más rápida? Escribir las 3 primeras iteraciones del método de relajación con esa w tomando como valores iniciales $x = 0$. Comparar con las 3 primeras iteraciones de Gauss-Seidel.

7. ¿Puede converger un método iterativo para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$x^{(k)} = B\,x^{(k-1)} + c,$$

   siendo B una matriz singular ($|B| = 0$)?

8. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

determine

a) el vector x tal que $A\,x = b$ por factorización de Cholesky,

b) A^{-1} a partir de la factorización de Cholesky,

c) la convergencia del método de Gauss-Jacobi realizando cuatro iteraciones con el vector inicial $x^{(0)} = 0$,

d) la convergencia del método de Gauss-Seidel realizando cuatro iteraciones con el vector inicial $x^{(0)} = 0$,

e) el polinomio característico de A por el método de LeVerrier y acote sus raíces (es decir, los autovalores de A),

f) la descomposición LU (es decir, $A = L\,U$ donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal principal y U es una matriz triangular superior.

9. Dado el sistema $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos

a) un método directo que, a su juicio, sea el más preciso,

b) justifique el uso del método que utilizó en (a),

c) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Jacobi? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa de convergencia,

d) ¿puede resolver este sistema por el método de Gauss-Seidel? ¿Por qué? Si lo puede hacer, haga sólo dos iteraciones y determine la tasa de convergencia,

e) utilice un parámetro de relajación w y determine para qué valores de dicho parámetro un método de relajación converge. Para un valor $w \neq 0$ y $w \neq 1$, si para dicho valor el método converge, haga dos iteraciones y determine la tasa de convergencia del método de relajación que ha utilizado.

10. Para la resolución del sistema $B\,x = b$, donde $x, b \in \mathbb{R}^2$, se propone el siguiente método iterativo

$$x^{(k+1)} = b + A\,x^{(k)}, \qquad k \geq 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda, c \in \mathbb{R}.$$

a) ¿Para qué valores de λ y c existe solución única?

b) Sea x_{PF} el punto fijo de la iteración. Calcule $x_{PF} - x^{(k)}$ para aquellos valores de λ y c para los que existe solución única. Suponga que $|\lambda| < 1$.

c) Para las condiciones del apartado (b), ¿cómo se comporta $\|x_{PF} - x^{(k)}\|_\infty$ y $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$, cuando $k \to \infty$? ¿Es la convergencia al punto fijo independiente de c? Justifique todos los resultados.