

Ejercicios de resolución numérica de problemas de condiciones de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Resuelva el problema $x'' - 2x' + x = 0$, $x(0) = \alpha$, $x(1) = \beta$. ¿Hay valores (α, β) tales que la solución no existe?
2. Demuestre que el problema de valores en el contorno

$$x'' = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0,$$

se resuelve mediante la fórmula

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds,$$

donde

$$G(t, s) = \begin{cases} s(t-1), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t(s-1), & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

La función G es la función de Green para este problema.

3. Aplique el método del disparo para resolver el problema

$$x'' = -9x, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi/6) = 5,$$

encontrando primero la solución x_z del problema

$$x_z'' = -9x_z, \quad x_z(0) = 1, \quad x_z'(0) = z,$$

y después ajustando z de modo que $x_z(\pi/6) = 5$. Cómo alteraría el resultado si $x(\pi/3) = 5$.

4. Para el problema

$$x'' = -2t(x')^2, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = \beta = 1 + \pi/4,$$

el método del disparo, se basa en resolver la ecuación

$$x_z'' = -2t(x_z')^2, \quad x_z(0) = 1, \quad x_z'(0) = z,$$

de modo que $\phi(z) \equiv x_z(1) - \beta = 0$. Determine la función $\phi(z)$ e indique cómo la resolvería mediante el método de Newton.

5. Resuelva el siguiente problema de valores en el contorno

$$x'' + 2x' + 10t = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(1) = 2,$$

para $x(1/2)$ mediante diferencias finitas con tamaño de malla $h = 1/4$.

6. Determine la solución numérica aproximada del problema

$$-u'' = x, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

mediante el método de elementos finitos en el espacio $V_h^{(1)}$ de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla $h = 1/4$. Calcule la solución exacta de dicho problema y compare los dos resultados que ha obtenido.

7. Resuelva el problema

$$-((1 + x) u'(x))' = 1 + (1 + 3x - x^2) \exp(-x), \quad 0 < x < 1$$

con $u(0) = u(1) = 0$, mediante el método de Galerkin espectral con polinomios trigonométricos en seno

$$U(x) = \sum_{j=1}^3 \xi_j \sin(j \pi x).$$

para $q = 3$. Para calcular las integrales que le surjan utilice la regla del trapecio.

8. Aplique el método de Elementos Finitos cG(1), que usa polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x) u'(x))' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$. Calcule la matriz de coeficientes y el vector no homogéneo del sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de la solución.